

Т Р У Д Ы
ЦЕНТРАЛЬНОГО АЭРО-ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
им. проф. Н. Е. Жуковского

Выпуск № 398

О. В. ГОЛУБЕВА и В. В. ГОЛУБЕВ

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ТЕОРИИ ЩИТКОВ КРЫЛЬЕВ САМОЛЕТА

ИЗДАНИЕ ЦЕНТРАЛЬНОГО АЭРО-ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
им. проф. Н. Е. ЖУКОВСКОГО

Москва

1939

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Настоящие работы посвящены теории щитков. В первой работе рассматриваются щитки, отделенные щелью от основной части крыла; приближенный метод, аналогичный методу, применяемому в теории предкрылка и закрылка, позволяет дать общие формулы, определяющие влияние щитка на работу крыла.

Во второй работе рассматриваются щитки, прилегающие к крылу. Систематическое применение формулы Шварц-Кристоффеля позволяет построить формулы, дающие обтекание крыла, и учесть влияние вихрей, образующихся между крылом и щитком. Все исследование ведется в условиях плоско-параллельного течения.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая работа посвящена теории щитков крыльев самолета в условиях плоско-параллельного потока, т. е. без учета влияния концов крыла и щитков. В работе рассматриваются щитки двух типов:

- 1) щитки, находящиеся на некотором расстоянии от крыла, так что вокруг щитка возможно обтекание воздуха с образованием циркуляции;
- 2) щитки, плотно прилегающие к основной части крыла.

В статье О. В. Голубевой, содержащей разработку общей теории щитков, работающих при условии свободного обтекания их потоком воздуха, применяется приближенный метод, основанный на замене щитка вихрем, неподвижно связанным с основной частью крыла; кроме того, в этой статье приведены некоторые общие формулы, позволяющие определить напряженность и положение добавочного вихря по положению его критических точек.

В статье по теории щитков, плотно прилегающих к основной части крыла, дано видоизменение метода построения потока, обтекающего контуры, составленные из прямолинейных отрезков, которые были разработаны С. А. Чаплыгиным и Н. С. Аржаниковым в применении к обтеканию крыла с открылком¹ и С. М. Тарг в применении к теории крыла со щитком².

Этот метод позволил также дать некоторые результаты, позволяющие оценить влияние вихрей, образующихся в воздухе вблизи крыла, на положение критических точек и на условия обтекания.

¹ С. А. Чаплыгин и Н. С. Аржаников. К теории открылка и закрылка. Собр. соч. С. А. Чаплыгина. Т. II. Стр. 277, 1933.

² С. М. Тарг. К теории крыла с щитовидным закрылком. Труды III конф. аэродинамики. 1935. Стр. 13.

ПРИБЛИЖЕННАЯ ТЕОРИЯ НАДКРЫЛКА И ПОДКРЫЛКА

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассматривается влияние на условия обтекания и на величину подъемной силы небольших добавочных крыльев, помещенных около середины хорды крыла над крылом (надкрылок) или под крылом (подкрылок). Конструкция некоторых типов щитков допускает свободное обтекание их потоком воздуха через щели между щитком и основной частью крыла, а потому такие щитки вполне совпадают с подкрылками, рассматриваемыми в настоящей работе.

Работа подкрылков и надкрылков изучается в условиях плоско-параллельного течения, при этом добавочное крыло считается имеющим столь малую хорду, что при учете влияния его на основную часть крыла оно может быть заменено одним вихрем. В работе применяется метод, изложенный в работах В. В. Голубева¹.

1. Обтекание круглого цилиндра в присутствии неподвижного вихря

Характеристическая функция течения около цилиндра радиуса равного единице будет:

$$w = V_{\infty} e^{-\theta i} \left(z + \frac{e^{2\theta i}}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z + \frac{I}{2\pi i} \ln \frac{z-a}{z-\bar{a}}, \quad (1)$$

где Γ — циркуляция потока вокруг цилиндра;

I — интенсивность вихря, помещенного вблизи цилиндра;

$a = \rho e^{i\theta}$ — аффикс оси добавочного вихря;

$\bar{a} = \frac{1}{\rho} e^{+i\theta}$ — аффикс оси сопряженного вихря относительно окружности.

Точки, где скорость равна нулю, найдем из уравнения:

$$\frac{dw}{dz} = V_{\infty} e^{-\theta i} \left(1 - \frac{e^{2\theta i}}{z^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z} + \frac{I}{2\pi i} \left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-\bar{a}} \right); \quad (2)$$

$$V_{\infty} e^{-\theta i} \left(1 - \frac{e^{2\theta i}}{z^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z} + \frac{I}{2\pi i} \left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-\bar{a}} \right) = 0;$$

$$V_{\infty} e^{-\theta i} \left\{ (z^2 - e^{2\theta i})(z-a)(z-\bar{a}) + \frac{\Gamma e^{\theta i}}{2\pi i V_{\infty}} z(z-a)(z-\bar{a}) + \frac{I e^{\theta i}}{2\pi i V_{\infty}} z^2(a-\bar{a}) \right\} = 0$$

¹ В. В. Голубев. Исследования по теории разрезного крыла. Труды ЦАГИ, вып. 306, 1937. Ч. II и „Об обтекании цилиндра в присутствии системы неподвижных вихрей“. 1937. Ученые записки МГУ в. 7.

или, располагая левую часть по степеням z :

$$z^4 + \left[\frac{\Gamma e^{\theta i}}{2\pi i V_{\infty}} - (a + \bar{a}) \right] z^3 + \left[a\bar{a} - e^{2\theta i} - \frac{\Gamma e^{\theta i}}{2\pi i V_{\infty}} (a + \bar{a}) + \right. \\ \left. + \frac{I e^{\theta i}}{2\pi i V} - (a - \bar{a}) \right] z^2 + \left[e^{2\theta i} (a + \bar{a}) + \frac{\Gamma e^{\theta i}}{2\pi i V_{\infty}} a\bar{a} \right] z - e^{2\theta i} a\bar{a} = 0. \quad (3)$$

Назовем корни уравнения (3) через z_1, z_2, z_3, z_4 ; тогда уравнение (2) можно представить в виде:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{V_{\infty} e^{-\theta i}}{z^2(z-a)(z-\bar{a})} (z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4). \quad (4)$$

Следствия из уравнения (3)

$$1. \quad z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 = -e^{2\theta i} a \cdot \bar{a}. \quad (5')$$

Полагаем $z_k = \rho_k e^{\alpha_k i}$,

$$\rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \rho_3 \cdot \rho_4 = 1,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 2\theta + \pi + 2\mu + 2\pi N.$$

При Γ и I , стремящихся к 0, $\alpha_1 \rightarrow \theta$, $\alpha_2 \rightarrow \pi + \theta$ и α_3 и $\alpha_4 \rightarrow \mu$; в пределе будем иметь:

$$\theta + \pi + \theta + 2\mu = 2\theta + \pi + 2\mu + 2\pi N,$$

N может изменяться принимая целые значения, а α_k , очевидно, изменяется непрерывно; отсюда следует, что $N=0$.

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 2\theta + \pi + 2\mu \quad (5'')$$

или

$$[\alpha_1 - \theta] + [\alpha_2 - (\pi + \theta)] + [\alpha_3 - \mu] + [\alpha_4 - \mu] = 0. \quad (5)$$

Углы θ и $\pi - \theta$ определяют на цилиндре критические точки, когда $\Gamma = 0$ и $I = 0$, т. е. нет вихрей. Назовем $\alpha_1 - \theta$, $\alpha_2 - (\pi + \theta)$, $\alpha_3 - \mu$, $\alpha_4 - \mu$ угловыми смещениями критических точек. Из равенства (5) следует, что при образовании у цилиндра вихрей Γ и I сумма угловых смещений критических точек равна нулю.

2. Если сделать конформное отображение плоскости z на z_1 таким образом, чтобы окружность $|z|=1$ перешла в действительную ось, то течения в нижней и верхней полуплоскости будут симметричны, а потому и положение критических точек относительно действительной оси плоскости z_1 тоже будет симметричными. Следовательно, или все критические точки лежат на поверхности цилиндра или критические точки z_3 и z_4 будут связаны следующим образом:

$$z_3 = S e^{\alpha_3 i} \quad \text{и} \quad z_4 = \frac{1}{S} e^{\alpha_3 i},$$

т. е. точки z_3 и z_4 симметричны относительно окружности.

3. Из уравнения (3) имеем:

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = a + \bar{a} - \frac{\Gamma}{2\pi i V_{\infty}}; \quad (a)$$

$$\sum_{k \neq l} z_k \cdot z_l = a\bar{a} - e^{2\theta i} - \frac{\Gamma e^{\theta i}}{2\pi i V_{\infty}} (a + \bar{a}) + \frac{I e^{\theta i}}{2\pi i V_{\infty}} (a + \bar{a}); \quad (b)$$

$$\sum_{k \neq l \neq j} z_k \cdot z_l \cdot z_j = e^{2\theta i} (a + \bar{a}) - \frac{\Gamma}{2\pi i V_\infty} a \bar{a}. \quad (c)$$

Делим (c) на (5'):

$$\sum \frac{1}{z_k} = \frac{a + \bar{a}}{a \bar{a}} + \frac{\Gamma e^{-\theta i}}{2\pi i V_\infty}.$$

Меняем i на $-i$ и, замечая, что если

$$z_k = S e^{\alpha_k i}, \text{ то } \frac{1}{z_k} = \frac{1}{S} e^{-\alpha_k i},$$

при замене i на $-i$ получим $\frac{1}{S} e^{\alpha_k i}$, что по (2) есть корень уравнения (3)

$$\sum z_k = \rho e^{\mu i} + \frac{1}{\rho} e^{\mu i} - \frac{\Gamma e^{-\theta i}}{2\pi i V_\infty}.$$

Получилось уравнение (a), т. е. уравнение (c) есть следствие уравнения (a). Независимые уравнения (a), (b) и (5). Разбиваем (a) и (b) на действительную и мнимую часть.

$$\sum S_k \cos \alpha_k = \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) \cos \mu - \frac{\Gamma}{2\pi V_\infty} \sin \theta; \quad (A')$$

$$\sum S_k \sin \alpha_k = \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) \sin \mu + \frac{\Gamma}{2\pi V_\infty} \cos \theta; \quad (A'')$$

$$\sum S_k S_l \cos (\alpha_k + \alpha_l) = \cos 2\mu - \cos 2\theta - \frac{\Gamma - I}{2\pi V_\infty} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) \sin (\theta + \mu); \quad (B')$$

$$\sum S_n \cdot S_l \sin (\alpha_n + \alpha_l) = \sin 2\mu - \sin 2\theta + \frac{\Gamma - I}{2\pi V_\infty} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) \cos (\theta - \mu). \quad (B'')$$

Из уравнения (5'') имеем:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 2\theta + \pi + 2\mu.$$

Умножая уравнения (B') и (B'') соответственно на $\cos (\theta + \mu)$ и $\sin (\theta + \mu)$ и складывая, получим:

$$\sum S_k S_l \cos (\alpha_k + \alpha_l) \cdot \cos (\theta + \mu) + \sum S_k S_l \sin (\alpha_k + \alpha_l) \sin (\theta + \mu) = 0;$$

$$\sum S_k S_l \cos (\alpha_k + \alpha_l - \theta - \mu) = 0. \quad (B''')$$

Это уравнение есть следствие уравнения (5'''). По свойству (2) полагаем

$$S_1 = S_2 = 1 \text{ и } S_4 = \frac{1}{S_3}$$

$$\begin{aligned} & \cos (\alpha_1 + \alpha_2 - \theta - \mu) + S_3 \cos (\alpha_1 + \alpha_3 - \theta - \mu) + \frac{1}{S_3} \cos (\alpha_1 + \alpha_4 - \theta - \mu) + \\ & + S_3 \cos (\alpha_2 + \alpha_3 - \theta - \mu) + \frac{1}{S_3} \cos (\alpha_2 + \alpha_4 - \theta - \mu) + \cos (\alpha_3 + \alpha_4 - \theta - \mu) = 0. \end{aligned}$$

По (5'') получим:

$$\alpha_1 + \alpha_2 - \theta - \mu = \theta + \mu - \alpha_3 - \alpha_4 + \pi = \pi - (\alpha_3 + \alpha_4 - \theta - \mu) \\ \cos(\alpha_1 + \alpha_2 - \theta - \mu) = -\cos(\alpha_3 + \alpha_4 - \theta - \mu).$$

Окончательно получим:

$$S_3 \cos(\alpha_1 + \alpha_3 - \theta - \mu) - S_3 \cos(\alpha_1 + \alpha_4 - \theta - \mu) + \\ + \frac{1}{S_3} \cos(\alpha_2 + \alpha_4 - \theta - \mu) - \frac{1}{S_3} \cos(\alpha_2 + \alpha_3 - \theta - \mu) = 0,$$

так как $\alpha_3 = \alpha_4$. Следовательно, два уравнения будут независимых и из них, очевидно, можно определить Γ и I .

4. Пусть критические точки лежат на поверхности цилиндра; тогда $z_k = e^{\alpha_k i}$ и на цилиндре $z = e^{\varphi i}$

$$z - z_k = e^{\varphi i} - e^{\alpha_k i} = e^{\frac{\varphi + \alpha_k}{2} i} \left[e^{\frac{\varphi - \alpha_k}{2} i} - e^{-\frac{\varphi - \alpha_k}{2} i} \right] = \\ = 2ie^{\frac{\varphi + \alpha_k}{2} i} \sin \frac{\varphi - \alpha_k}{2}.$$

Уравнение (4) будет иметь вид:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{2^4 V_\infty e^{-\theta i} e^{\left(2\varphi + \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}{2}\right) i}}{e^{2\varphi i} [e^{2\varphi i} - (a + \bar{a})e^{\varphi i} + a\bar{a}]} \cdot \sin \frac{\varphi - \alpha_1}{2} \sin \frac{\varphi - \alpha_2}{2} \sin \frac{\varphi - \alpha_3}{2} \sin \frac{\varphi - \alpha_4}{2}.$$

Обозначим:

$$r = \frac{1}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) \quad (r > 1)$$

$$\frac{dw}{dz} = 16V_\infty \frac{\sin \frac{\varphi - \alpha_1}{2} \sin \frac{\varphi - \alpha_2}{2} \sin \frac{\varphi - \alpha_3}{2} \sin \frac{\varphi - \alpha_4}{2}}{2 [\cos(\varphi - \mu) - r]} \times \\ \times e^{-\varphi i} e^{\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - 2\theta - 2\mu}{2} i}. \quad (6)$$

Пользуясь свойством 1, получим:

$$\frac{dw}{dz} = 8V_\infty e^{-\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) i} \frac{\sin \frac{\varphi - \alpha_1}{2} \sin \frac{\varphi - \alpha_2}{2} \sin \frac{\varphi - \alpha_3}{2} \sin \frac{\varphi - \alpha_4}{2}}{r - \cos(\varphi - \mu)}. \quad (7)$$

Положим, что z_3 и z_4 не лежат на цилиндре, тогда:

$$z_3 = S e^{\beta i} \quad \text{и} \quad z_4 = \frac{1}{S} e^{\beta i} \quad (\beta = \alpha_3 = \alpha_4)$$

$$z_3 = e^{i[\beta - i \ln S]}, \quad z_4 = e^{i[\beta + i \ln S]}$$

Следовательно, в уравнении (7) надо положить:

$$\alpha_3 = \beta - i \ln S; \quad \alpha_4 = \beta + i \ln S;$$

$$\sin \frac{\varphi - \alpha_3}{2} \sin \frac{\varphi - \alpha_4}{2} = \sin \left(\frac{\varphi - \beta}{2} + i \frac{\ln S}{2} \right) \sin \left(\frac{\varphi - \beta}{2} - i \frac{\ln S}{2} \right).$$

Применим формулу: $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)$

$$\begin{aligned} \sin \frac{\varphi - \alpha_3}{2} \sin \frac{\varphi - \alpha_4}{2} &= \sin^2 \frac{\varphi - \beta}{2} - \sin^2 \left(i \frac{\ln S}{2} \right) = \\ &= \sin^2 \frac{\varphi - \beta}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{\ln S}{2}; \end{aligned}$$

$$\operatorname{sh} \frac{\ln S}{2} = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{\ln S}{2}} - e^{-\frac{\ln S}{2}} \right) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{S} - \frac{1}{\sqrt{S}} \right);$$

$$\operatorname{sh}^2 \frac{\ln S}{2} = \frac{1}{4} \left(S - \frac{1}{S} \right) - \frac{1}{2}.$$

Уравнение (7) будет вида:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= 4V_\infty e^{-\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)i} \sin \frac{\varphi - \alpha_1}{2} \sin \frac{\varphi - \alpha_2}{2} \times \\ &\times \frac{\frac{1}{2} \left(S + \frac{1}{S} \right) - \cos(\varphi - \beta)}{\frac{1}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) - \cos(\varphi - \mu)}; \end{aligned} \quad (8')$$

$$r = \frac{1}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) = 2 \left\{ \frac{1}{2} \left(\sqrt{\rho} - \frac{1}{\sqrt{\rho}} \right)^2 + \frac{1}{2} \right\} = 2 \operatorname{sh}^2 \frac{\sqrt{\rho}}{2} + 1;$$

$$\cos(\varphi - \mu) = 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi - \mu}{2};$$

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= 4V_\infty e^{-\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)i} \sin \frac{\varphi - \alpha_1}{2} \sin \frac{\varphi - \alpha_2}{2} \times \\ &\times \frac{\sin^2 \frac{\varphi - \beta}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{\sqrt{S}}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi - \mu}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{\sqrt{\rho}}{2}}. \end{aligned} \quad (8'')$$

Иначе можно написать:

$$\frac{dw}{dz} = 4V_\infty e^{-\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)i} \sin \frac{\varphi - \alpha_1}{2} \sin \frac{\varphi - \alpha_2}{2} \cdot L. \quad (8)$$

Где L выражается:

$$L = \frac{\frac{1}{2} \left(S + \frac{1}{S} \right) - \cos(\varphi - \beta)}{\frac{1}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) - \cos(\varphi - \mu)} = \frac{\sin^2 \frac{\varphi - \beta}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{\sqrt{S}}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi - \mu}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{\sqrt{\rho}}{2}}.$$

В случае $I=0$, z_3 и z_4 сливаются с a и \bar{a} и $\rho=S$, $\mu=\beta$ и $L=1$ мы получаем

$$\frac{dw}{dz} = 4V_{\infty} e^{-\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)i} \sin \frac{\varphi - \alpha_1}{2} \cdot \sin \frac{\varphi - \alpha_2}{2} \quad (9)$$

формулу (9) для скорости обтекания цилиндра без добавочных вихрей.

2. Смещение критической точки

Изображение на цилиндре острой задней кромки является критической точкой; она не перемещается при изменении угла атаки. Можем считать, что она находится в $z=1$.

Полагая в (8) $\alpha_1=0$, имеем:

$$\frac{dw}{dz} = 4V_{\infty} e^{-\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)i} \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi - \alpha}{2} L. \quad (10)$$

Формула скорости для обтекания цилиндра без добавочных вихрей:

$$\frac{dw_1}{dz} = 4V_{\infty} e^{-\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)i} \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi - \alpha'}{2}. \quad (10')$$

Следовательно, присутствие вихрей сказывается: 1) в замене угла α' через α ; 2) в появлении множителя L , который изменяет величину скорости в точках цилиндра.

При отсутствии добавочных вихрей точкою разветвления струй является точка $z = e^{(2\theta + \pi)i}$. Пусть e^{ai} соответствующая смещенная точка при наличии добавочных вихрей. Назовем $\alpha - (2\theta + \pi) = 2\delta$ смещением первой критической точки. Наша задача найти величину δ .

Из уравнения (2) для определения положения критических точек будем иметь уравнение:

$$V_{\infty} e^{-\theta i} \left(1 - \frac{e^{2\theta i}}{z^2}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z} + \frac{I}{2\pi i} \left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-\bar{a}}\right) = 0. \quad (11)$$

Этому уравнению должно удовлетворять значение $z=1$

$$V_{\infty} e^{-\theta i} (1 - e^{2\theta i}) + \frac{\Gamma}{2\pi i} + \frac{I}{2\pi i} \left(\frac{1}{1-a} - \frac{1}{1-\bar{a}}\right) = 0. \quad (12)$$

Исключим из (11) и (12) Γ .

$$\frac{z-1}{z} \left\{ V_{\infty} e^{-\theta i} \left(1 + \frac{e^{2\theta i}}{z}\right) + iA \frac{z - a\bar{a}}{(z-a)(z-\bar{a})} \right\} = 0. \quad (13)$$

Где

$$A = \frac{I(a - \bar{a})}{2\pi(1-a)(1-\bar{a})}. \quad (14)$$

Берем точки на цилиндре $z = e^{i\varphi}$, тогда:

$$\frac{e^{i\varphi} - 1}{e^{i\varphi}} \left\{ V e^{-\theta i} (1 + e^{(2\theta - \varphi)i}) + iA \frac{e^{i\varphi} - e^{2\mu i}}{e^{2\varphi i} + \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) \cdot e^{(\mu + \varphi)i} + e^{2\mu i}} \right\} = 0.$$

$$e^{-\theta i} (1 + e^{(2\theta - \varphi) i}) = e^{-\frac{\varphi i}{2}} \left[e^{-(\theta - \frac{\varphi}{2}) i} + e^{(\theta - \frac{\varphi}{2}) i} \right] =$$

$$= 2 \cos \left(\theta - \frac{\varphi}{2} \right) e^{-\frac{\varphi}{2} i}.$$

$$\frac{e^{\varphi i} - e^{2\mu i}}{e^{2\varphi i} - \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) e^{\mu i + \varphi i} + e^{2\mu i}} = e^{-\frac{\varphi}{2} i} \frac{e^{\left(\frac{\varphi}{2} - \mu \right) i} e^{-\left(\frac{\varphi}{2} - \mu \right) i}}{2 \cos (\varphi - \mu) - \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right)} =$$

$$= 2i e^{-\frac{\varphi}{2} i} \frac{\sin \left(\frac{\varphi}{2} - \mu \right)}{2 \cos (\varphi - \mu) - \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right)}.$$

$$\frac{e^{\varphi i} - 1}{e^{\varphi i}} = e^{-\frac{\varphi}{2} i} \left(e^{\frac{\varphi}{2} i} - e^{-\frac{\varphi}{2} i} \right) = 2i e^{-\frac{\varphi}{2} i} \cdot \sin \frac{\varphi}{2}.$$

$$\frac{dw}{dz} = 2i e^{-\frac{\varphi}{2} i} \sin \frac{\varphi}{2} \left\{ V_{\infty} 2 \cos \left(\theta - \frac{\varphi}{2} \right) - A \frac{2 \sin \left(\frac{\varphi}{2} - \mu \right)}{2 \cos (\varphi - \mu) - \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right)} \right\}.$$

Полагаем

$$\frac{A}{2V} = K;$$

$$r = \frac{1}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right).$$

Получим:

$$\frac{dw}{dz} = 4 V_{\infty} e^{-(\varphi - \frac{\pi}{2}) i} \sin \frac{\varphi}{2} \left[\cos \left(\theta - \frac{\varphi}{2} \right) - K \frac{\sin \left(\frac{\varphi}{2} - \mu \right)}{\cos (\varphi - \mu) - r} \right] \quad (15')$$

$$\cos \left(\theta - \frac{\varphi}{2} \right) - K \frac{\sin \left(\frac{\varphi}{2} - \mu \right)}{\cos (\varphi - \mu) - r} = 0. \quad (15)$$

Пользуясь уравнением (15) и уравнением:

$$\alpha = \pi + 2\theta + 2\delta, \quad (16)$$

определим приближенно δ .

Заметим, что смещение критической точки под действием вихря незначительно, т. е. δ мало.

Подставляем в уравнение (15) на место φ α из уравнения (16); это можно сделать, так как уравнение (15) определяет критические точки и, следовательно, α , определяющее критическую точку, должно ему удовлетворять.

$$\cos \left(\theta - \frac{\pi}{2} - \theta - \delta \right) - K \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} + \theta + \delta - \mu \right)}{\cos (\pi + 2\theta + 2\delta - \mu) - r} = 0;$$

$$-\sin \delta [r + \cos (2\theta + 2\delta - \mu)] + K \cos (\theta - \mu + \delta) = 0.$$

Заменяем по малости δ выражения $\sin \delta$ и $\cos \delta$ соответственно через δ и 1.

$$-\delta [r + \cos(2\theta - \mu)] + K [\cos(\theta - \mu) - \delta \sin(\theta - \mu)] = 0.$$

Членами, содержащими δ^2 , пренебрегаем:

$$\delta = \frac{K \cdot \cos(\theta - \mu)}{r + \cos(2\theta - \mu) + K \sin(\theta - \mu)}. \quad (17)$$

Рассмотрим два крайних случая, соответствующих щитку над крылом и щитку под крылом.

1. В случае щитка над крылом полагаем $\mu = \frac{\pi}{2}$.

Подставляя в формулу (17), получим:

$$\delta = \frac{K \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}{r + \cos\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right) + K \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)};$$

$$\delta = \frac{K \sin \theta}{r + \sin 2\theta - K \cos \theta}. \quad (18)$$

Угол θ порядка $15-25^\circ$. При этих углах δ может быть мало только при малом K ; если так, то отбросим член $K \cos \theta$; получим

$$\delta = \frac{K \sin \theta}{r + \sin 2\theta}.$$

2. В случае щитка под крылом полагаем $\mu = \frac{3\pi}{2}$.

По формуле (17) будем иметь:

$$\delta = \frac{K \cos\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right)}{r + \cos\left(2\theta - \frac{3\pi}{2}\right) + K \sin\left(2\theta - \frac{3\pi}{2}\right)};$$

$$\delta = -\frac{K \sin \theta}{r - \sin 2\theta + K \cos 2\theta}. \quad (18')$$

Приближенно будем иметь:

$$\delta = -\frac{K \sin \theta}{r - \sin 2\theta}. \quad (19')$$

По формуле (14) $K = \frac{A}{2V_\infty}$ и $r = \frac{1}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right)$ получим:

$$K = \frac{I(a - \bar{a})}{4\pi V_\infty (1 - a)(1 - \bar{a})}.$$

Подставляем

$$a = \rho e^{i\mu}, \quad \bar{a} = \frac{1}{\rho} e^{-i\mu}, \quad r = \frac{1}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) \quad \text{и} \quad d = \frac{1}{2} \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right)$$

$$K = -\frac{I}{4\pi V_\infty} \frac{d}{r - \cos \mu}. \quad (19'')$$

При отсутствии щитков циркуляция Γ определяется по формуле (12) при $I = 0$.

$$\Gamma = 2\pi i V_{\infty} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = -4\pi V_{\infty} \sin \theta. \quad (20)$$

Отсюда (19'') можно представить в виде:

$$K = \frac{I}{\Gamma} \frac{d \sin \theta}{r - \cos \mu}.$$

Подставляем K в (17)

$$\delta = \frac{I}{\Gamma} \frac{d \sin \theta \cos(\theta - \mu)}{(r - \cos \mu) [r + \cos(2\theta - \mu) + K \sin(\theta - \mu)]}.$$

Откуда при $\mu = \frac{\pi}{2}$ (щиток над крылом), пренебрегая членом $K \cos \theta$, получим:

$$\delta_1 = \frac{I \sin^2 \theta d}{\Gamma r (r + \sin 2\theta)}. \quad (21)$$

Полагаем $\mu = \frac{3\pi}{2}$ (щиток под крылом), пренебрегая членом $K \cos \theta$, получим:

$$\delta_2 = - \frac{I d \sin^2 \theta}{\Gamma r (r - \sin 2\theta)}. \quad (21')$$

Так как при обычном расположении надкрылка и подкрылка Γ и I одного знака, то по (21) и (21') выходит, что для надкрылка $\delta > 0$ и для подкрылка $\delta < 0$. Найдем отношение $\left| \frac{\delta_1}{\delta_2} \right|$.

$$\left| \frac{\delta_1}{\delta_2} \right| = \frac{r - \sin 2\theta}{r + \sin 2\theta}.$$

Эта формула показывает, что изменение угла атаки для щитка над крылом меньше, чем для щитка под крылом при одном и том же отношении $\frac{I}{\Gamma}$.

3. Влияние вихря на распределение скоростей на поверхности цилиндра

Найдем формулы, определяющие добавочные критические точки β и γ . Критические точки найдутся из уравнения (15)

$$\cos\left(\theta - \frac{\varphi}{2}\right) - K \frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2} - \mu\right)}{\cos(\varphi - \mu) - r} = 0. \quad (15)$$

Одна критическая точка у нас найдена, именно:

$$\alpha = \pi + 2\theta + 2\delta$$

δ — найдено. Подставляем α в уравнении (15)

$$\cos\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right) - K \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \mu\right)}{\cos(\alpha - \mu) - r} = 0. \quad (22)$$

Исключаем из (15) и (22) K

$$\cos\left(\theta - \frac{\varphi}{2}\right) - \cos\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2} - \mu\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \mu\right)} \cdot \frac{\cos(\alpha - \mu) - r}{\cos(\varphi - \mu) - r} = 0. \quad (23)$$

Отсюда получим:

$$\begin{aligned} & \cos\left(\theta - \frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \mu\right) \cos(\varphi - \mu) - \\ & - \cos\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi}{2} - \mu\right) \cos(\alpha - \mu) - r \left[\cos\left(\theta - \frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \mu\right) - \right. \\ & \left. - \cos\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi}{2} - \mu\right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

Применим формулу:

$$\begin{aligned} \cos A \sin B \cos C = & \frac{1}{4} [\sin(A + B + C) + \sin(A + B - C) + \\ & + \sin(B - A + C) + \sin(B - A - C)]. \end{aligned}$$

Уравнение (24) будет вида:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sin \frac{\alpha - \varphi}{2} [\cos(\theta - \varphi) + \cos(\theta - \alpha) + \cos \theta - \cos(\alpha - \varphi - \theta - 2\mu) - \\ - 2r \cos(\theta - \mu)] = 0. \end{aligned} \quad (25')$$

Следовательно, два остальных корня найдутся из уравнения:

$$\begin{aligned} \cos(\theta - \varphi) + \cos(\theta - \alpha) + \cos \theta - \cos(\alpha + \varphi - \theta - 2\mu) - \\ - 2r \cos(\theta - \mu) = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

или

$$2 \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \mu\right) \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \varphi - \theta - \mu\right) = 2r \cos(\theta - \mu) - \cos(\theta - \alpha) - \cos \theta,$$

откуда:

$$\beta = \theta - \frac{\alpha}{2} + \mu + \lambda, \quad \gamma = \theta + \mu - \frac{\alpha}{2} + \pi - \lambda, \quad (26)$$

$$\lambda = \arcsin \frac{2r \cos(\theta - \mu) - \cos(\theta - \alpha) - \cos \theta}{2 \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \mu\right)},$$

$$\lambda = \arcsin \frac{r \cos(\theta - \mu) - \cos\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right) \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \mu\right)}. \quad (27)$$

Полагаем:

$$S = \frac{r \cos(\theta - \mu) - \cos\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right) \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \mu\right)}. \quad (28)$$

λ по (27) принимает действительное значение только при $S \leq 1$.
 $\alpha = \pi + 2\theta + 2\delta$ подставляем α в S

$$S = \frac{r \cos(\theta - \mu) - \sin \delta \sin(\theta + \delta)}{\cos(\theta + \delta - \mu)}.$$

Так как δ мало, то δ^2 откидываем.

$$\sin \delta \sin(\theta + \delta) \approx \delta \sin \theta,$$

$$\cos(\theta - \mu + \delta) = \cos(\theta - \mu) - \sin(\theta - \mu)\delta = \cos(\theta - \mu)[1 - \delta \operatorname{tg}(\theta - \mu)].$$

Подставляем в S

$$S = \frac{r \cos(\theta - \mu) - \delta \sin \theta}{\cos(\theta - \mu)} [1 + \operatorname{tg}(\theta - \mu)\delta]$$

или

$$S = r - \delta \left[r \operatorname{tg}(\mu - \theta) + \frac{\sin \theta}{\cos(\theta - \mu)} \right]. \quad (29)$$

При $\mu = \frac{\pi}{2}$, что соответствует случаю щитка над крылом

$$S_1 = r - \delta \left[r \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \frac{\sin \theta}{\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)} \right] \delta_1 > 0 \text{ по (21)}$$

$$S_1 = r - \delta [r \operatorname{ctg} \theta + 1].^* \quad (30)$$

При $\mu = \frac{3\pi}{2}$, что соответствует случаю щитка под крылом:

$$S_2 = r - \delta \left[r \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) + \frac{\sin \theta}{\cos\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right)} \right] \delta_2 < 0 \text{ по (21')}$$

$$S_2 = r - \delta [r \operatorname{ctg} \theta - 1]. \quad (30')$$

Полагаем, что S_1 и S_2 будут величинами большими 1 [что очевидно будет по формулам (30) и (30')], тогда λ будет величина комплексная. Найдем при этих условиях β и γ .

$$\operatorname{arc} \sin S = \frac{1}{i} \ln \{Si \pm \sqrt{1 - S^2}\}.$$

В нашем случае $S > 1$.

$$\lambda = \operatorname{arc} \sin S = \frac{1}{i} \ln \{Si \pm i\sqrt{S^2 - 1}\} = \frac{\pi}{2} - i \ln \{S \pm \sqrt{S^2 - 1}\}.$$

Отсюда:

$$\lambda_1 = \frac{\pi}{2} - i \ln \{S + \sqrt{S^2 - 1}\};$$

$$\lambda_2 = \frac{\pi}{2} - i \ln \{S - \sqrt{S^2 - 1}\} = \frac{\pi}{2} + i \ln \frac{1}{S - \sqrt{S^2 - 1}} \frac{S + \sqrt{S^2 - 1}}{S - \sqrt{S^2 - 1}};$$

$$\lambda_2 = \frac{\pi}{2} + i \ln (S + \sqrt{S^2 - 1}).$$

Полагаем

$$\ln \{S + \sqrt{S^2 - 1}\} = v; \quad (31)$$

$$\lambda_1 = \frac{\pi}{2} - i\nu; \quad \lambda_2 = \frac{\pi}{2} + i\nu.$$

По формулам (26) получим:

$$\beta = \theta + \mu - \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2} - i\nu,$$

$$\gamma = \theta + \mu - \frac{\alpha}{2} + \pi - \frac{\pi}{2} + i\nu.$$

Подставим

$$\alpha = \pi + 2\theta + 2\delta, \quad \beta = \mu - \delta - i\nu, \quad \gamma = \mu - \delta + i\nu.$$

Подставим найденные величины в формулу (7), где в нашем случае

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \alpha, \quad \alpha_3 = \beta, \quad \alpha_4 = \gamma$$

$$\frac{dw}{dz} = 8V_{\infty} e^{-\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)i} \frac{\sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi - \alpha}{2} \sin \frac{\varphi - \beta}{2} \sin \frac{\varphi - \gamma}{2}}{r - \cos(\varphi - \mu)}. \quad (7')$$

Подставив сюда найденные величины, получим скорость на цилиндре:

$$\sin \frac{\varphi - \beta}{2} \sin \frac{\varphi - \gamma}{2} = \sin \left[\frac{\varphi - (\mu - \delta)}{2} + \frac{\nu}{2} i \right] \sin \left[\frac{\varphi - (\mu - \delta)}{2} - i \frac{\nu}{2} \right].$$

Имеем формулу:

$$\sin(A + B) \sin(A - B) = \sin^2 A - \sin^2 B.$$

Применяем ее для нашего случая.

$$\sin \frac{\varphi - \beta}{2} \sin \frac{\varphi - \gamma}{2} = \sin^2 \frac{\varphi - (\mu - \delta)}{2} - \sin^2 i \frac{\nu}{2}$$

$$\sin ix = i \operatorname{sh} x$$

$$\sin \frac{\varphi - \beta}{2} \sin \frac{\varphi - \gamma}{2} = \sin^2 \frac{\varphi - (\mu - \delta)}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{\nu}{2}.$$

Формула (7') будет вида:

$$\frac{dw}{dz} = 8V_{\infty} e^{-\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)i} \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi - \alpha}{2} \frac{\sin^2 \frac{\varphi - (\mu - \delta)}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{\nu}{2}}{r - \cos(\varphi - \mu)}. \quad (32)$$

Обозначим:

$$2 \frac{\sin^2 \frac{\varphi - (\mu - \delta)}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{\nu}{2}}{r - \cos(\varphi - \mu)} = L. \quad (33)$$

Тогда

$$\frac{dw}{dz} = 4 V_{\infty} e^{-\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)i} \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi - \alpha}{2} \cdot L, \quad (34)$$

так как

$$\frac{2 \left[\sin^2 \frac{\varphi - (\mu - \delta)}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{\nu}{2} \right]}{r - \cos(\varphi - \mu)} = L$$

и

$$2 \sin^2 \frac{\varphi - (\mu - \delta)}{2} = 1 - \cos(\varphi - (\mu - \delta))$$

$$\operatorname{sh} \nu = \frac{e^{\nu} - e^{-\nu}}{2};$$

$$2 \operatorname{sh}^2 \frac{\nu}{2} = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{\nu}{2}} - e^{-\frac{\nu}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} (e^{\nu} - 2 + e^{-\nu}) = \frac{1}{2} \left(e^{\nu} + \frac{1}{e^{\nu}} \right) - 1,$$

то получим

$$L = \frac{\frac{1}{2} \left(e^{\nu} + \frac{1}{e^{\nu}} \right) - \cos(\varphi - (\mu - \delta))}{\frac{1}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) - \cos(\varphi - \mu)}; \quad (35)$$

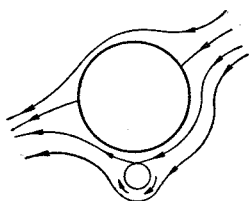
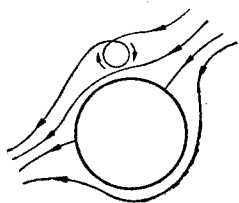
но $\frac{1}{2} \left(e^{\nu} + \frac{1}{e^{\nu}} \right)$ есть расстояние от центра цилиндра до критической точки потока, так как

$$\left. \begin{aligned} e^{\nu} &= S + \sqrt{S^2 - 1} \\ e^{-\nu} &= S - \sqrt{S^2 - 1} \end{aligned} \right\} S = \frac{1}{2} (e^{\nu} + e^{-\nu}).$$

Формула (35) будет вида:

$$L = \frac{S - \cos(\varphi - (\mu - \delta))}{r - \cos(\varphi - \mu)}. \quad (36)$$

Заметим, что для щитка над крылом $\left(\mu = \frac{\pi}{2}\right) S_1 < r$ и аналогично для щитка



Фиг. 1

под крылом $\left(\mu = \frac{3\pi}{2}\right) S_2 > r$;
это следует из формул (30).

Возьмем $\varphi = \mu - \frac{\delta}{2}$; тогда

$$L = \frac{S - \cos \frac{\delta}{2}}{r - \cos \frac{\delta}{2}},$$

а потому имеем следующий результат: в случае щитка над крылом ($S_1 < r$) в точке $\varphi = \mu - \frac{\delta}{2}$ $L < 1$ и в случае щитка под крылом ($S_2 > r$) $L > 1$, т. е. щиток над крылом уменьшает скорость на поверхности цилиндра вблизи щитка и щиток под крылом увеличивает ее. Физическая картина этого представлена на фиг. 1.

Решим вопрос о том промежутке на поверхности цилиндра, где щиток над крылом уменьшает, а щиток под крылом увеличивает скорость. Для этого найдем точки на поверхности цилиндра, где $L = 1$.

Из уравнения (36) имеем:

$$\begin{aligned}\frac{S - \cos(\varphi - (\mu - \delta))}{r - \cos(\varphi - \mu)} &= 1; \\ S - r &= \cos(\varphi - (\mu - \delta)) - \cos(\varphi - \mu); \\ 2 \sin \left[\varphi - \left(\mu - \frac{\delta}{2} \right) \right] \sin \frac{\delta}{2} &= r - S.\end{aligned}$$

Находим отсюда два угла:

$$\left. \begin{aligned}\varphi_1 &= \mu - \frac{\delta}{2} + \arcsin \frac{r - S}{2 \sin \frac{\delta}{2}}, \\ \varphi_2 &= \mu - \frac{\delta}{2} + \pi - \arcsin \frac{r - S}{2 \sin \frac{\delta}{2}}.\end{aligned} \right\} \quad (37)$$

По (29)

$$S = r - \delta \left[\operatorname{tg}(\mu - \theta) r + \frac{\sin \theta}{\cos(\theta - \mu)} \right]$$

и заменяем $2 \sin \frac{\delta}{2} \approx \delta$ получим:

$$\left. \begin{aligned}\varphi_1 &= \mu - \frac{\delta}{2} + \arcsin \left[r \operatorname{tg}(\mu - \theta) + \frac{\sin \theta}{\cos(\theta - \mu)} \right], \\ \varphi_2 &= \mu - \frac{\delta}{2} + \pi - \arcsin \left[r \operatorname{tg}(\mu - \theta) + \frac{\sin \theta}{\cos(\theta - \mu)} \right].\end{aligned} \right\} \quad (37')$$

Разберем крайние случаи.

1. Щиток над крылом $\mu = \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2} + \arcsin \left[r \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) + \frac{\sin \theta}{\cos \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right)} \right]; \\ \varphi_2 &= \frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2} + \pi - \arcsin \left[r \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) + \frac{\sin \theta}{\cos \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right)} \right]; \\ \varphi_1 &= \frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2} + \arcsin [r \operatorname{ctg} \theta + 1]; \\ \varphi_2 &= \frac{3\pi}{2} - \frac{\delta}{2} - \arcsin [r \operatorname{ctg} \theta + 1].\end{aligned}$$

Из полученных формул очевидно, что $[r \operatorname{ctg} \theta + 1] > 1$, потому что $r > 1$, $\operatorname{ctg} \theta > 1$ ($\theta \approx 15^\circ$). И, следовательно, для щитка над крылом точек на цилиндре, где $L = 1$ не будет. В этом случае во всех точках цилиндра $L < 1$ (что очевидно из рассуждений на стр. 11).

2. Щиток под крылом $\mu = \frac{3\pi}{2}$.

$$\varphi_1 = \frac{3\pi}{2} - \frac{\delta}{2} + \arcsin \left[r \operatorname{tg} \left(\frac{3\pi}{2} - \theta \right) + \frac{\sin \theta}{\cos \left(\theta - \frac{3\pi}{2} \right)} \right];$$

$$\varphi_2 = \frac{3\pi}{2} - \frac{\delta}{2} + \pi - \arcsin \left[r \operatorname{tg} \left(\frac{3\pi}{2} - \theta \right) + \frac{\sin \theta}{\cos \left(\theta - \frac{3\pi}{2} \right)} \right];$$

$$\varphi_1 = \frac{3\pi}{2} - \frac{\delta}{2} + \arcsin [r \operatorname{ctg} \theta - 1];$$

$$\varphi_2 = \frac{5\pi}{2} - \frac{\delta}{2} - \arcsin [r \operatorname{ctg} \theta - 1],$$

что, очевидно, можно заменить углом:

$$\varphi'_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2} - \arcsin [r \operatorname{ctg} \theta - 1].$$

В этом случае $r \operatorname{ctg} \theta$, очевидно, будет больше 1; и следовательно, для щитка под крылом скорость во всех точках цилиндра будет увеличиваться $L > 1$.

4. Давление потока на цилиндр в присутствии вихря

Для определения подъемной силы крыла применим теорему Жуковского. Определим величину циркуляции вокруг всей системы. По формуле (2) получим:

$$\int \frac{dw}{dz} dz = \Gamma + I - I = \Gamma.$$

В этом случае Γ зависит от величины добавочных вихрей.

По (12) имеем:

$$\Gamma = -V_{\infty} e^{-\theta i} (1 - e^{2\theta i}) 2\pi i - I \frac{a - \bar{a}}{(1-a)(1-\bar{a})};$$

$$\Gamma = -4V_{\infty} \pi \sin \theta + \frac{Id}{r - \cos \mu}. \quad (38)$$

Так как в случае надкрылка и подкрылка $I < 0$, то можно написать:

$$|\Gamma| = 4\pi V_{\infty} \sin \theta + |I| \frac{d}{r - \cos \mu}.$$

При отсутствии вихрей:

$$\Gamma = 4\pi V_{\infty} \sin \theta.$$

Следовательно, присутствие вихря дает увеличение циркуляции и подъемной силы.

$$|\Delta \Gamma| = |I| \frac{d}{r - \cos \mu}; \quad |\Delta P| = \rho V_{\infty} |I| \frac{d}{r - \cos \mu}.$$

Рассмотрим два случая:

$$1. \quad \mu = \frac{\pi}{2}$$

$$|\Delta \Gamma_1| = |I| \frac{d}{r}.$$

$$2. \quad \mu = \frac{3\pi}{2}$$

$$|\Delta \Gamma_2| = |I| \frac{d}{r}.$$

Подкрылок и надкрылок дают одно и то же увеличение подъемной силы.

Для практического применения этих результатов имеет важное значение вопрос о том, как распределяется подъемная сила между основной частью крыла и его добавочной частью. Для этого применим следующим образом формулу Чаплыгина-Блязиуса. Пусть мы имеем ось вихря „а“ и пусть L линия тока, замкнутая и окружающая вихрь. Найдем величину сил, с которыми поток действует на массу жидкости, заключенную внутри цилиндра, построенного на L и длиною единица. В этом случае мы можем применить теорему Чаплыгина-Блязиуса и получим:

$$Y + iX = -\frac{\rho}{2} \int_L \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz. \quad (39)$$

По формуле (2)

$$\frac{dw}{dz} = V_{\infty} e^{-\gamma_0 i} \left(1 - \frac{e^{2\theta i}}{z^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z} + \frac{I}{2\pi i} \left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-\bar{a}} \right). \quad (2)$$

Выражение $\frac{dw}{dz}$ — можно еще представить в виде:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{I}{2\pi i} \frac{1}{z-a} + A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \dots \quad (40)$$

Но

$$\left(\frac{dw}{dz} - \frac{I}{2\pi i} \frac{1}{z-a} \right)_{z=a} = u_0 - iv_0 = V_0 e^{-\gamma_0 i},$$

u_0 и v_0 — компоненты скорости V_0 в оси вихря и γ_0 — угол V_0 с действительной осью. Отсюда:

$$A_0 = V_0 e^{-\gamma_0 i}.$$

Подставив разложение (40) в формулу (39), получим:

$$Y + iX = -\frac{\rho}{2} \frac{2 \cdot A_0 I}{2\pi i} \cdot 2\pi i = -\rho V_0 I e^{-\gamma_0 i}. \quad (41)$$

Получим обыкновенную формулу Жуковского с заменой скорости на ∞ скоростью в оси вихря. Так как в рассматриваемом случае I отрицательно, то по (41) имеем:

$$X = -\rho V_0 |I| \sin \gamma_0, \quad Y = \rho V_0 |I| \cos \gamma_0. \quad (42)$$

Подъемная сила, приложенная к дополнительному вихрю, равна:

$$\rho V_0 |I| \cos \gamma_0.$$

Следовательно, между основной частью крыла и его дополнительной частью распределение подъемной силы при разнообразных условиях совершается следующим образом:

$$P_2 = \rho V_0 |I| \cos \gamma_0; \quad (43)$$

$$P_1 = \rho V_{\infty} \left(4\pi V_{\infty} \sin \theta + |I| \frac{d}{r - \cos \mu} \right) - \rho V_0 |I| \cos \gamma_0; \quad (44')$$

$$P_1 = 4\pi V_{\infty}^2 \left[\sin \theta + \frac{|I|}{4\pi V_{\infty}} \left(\frac{d}{r - \cos \mu} - \frac{v_0}{V_{\infty}} \cos \gamma_0 \right) \right]. \quad (44)$$

Общая сила, действующая на щиток, выражается формулой:

$$P_s = \rho V_0 |I|. \quad (45)$$

При этом мы принимаем щиток за один вихрь; в действительности же мы имеем дело с обтеканием отдельного профиля, имеющим достаточно большие размеры по сравнению с основной частью крыла. Для формул (43), (44) и (45) надо найти v_0 и γ_0 . Из (2)

$$u_0 - iv_0 = V_\infty e^{-\theta i} \left(1 - \frac{1}{\rho^2} e^{2(\theta - \mu)i} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{\rho} e^{-\mu i} - \frac{I}{2\pi i} \frac{e^{-\mu i}}{\left(\rho - \frac{1}{\rho} \right)};$$

$$V_0 \cos \gamma_0 = u_0 = V_\infty \left[\cos \theta - \frac{1}{\rho} \cos (\theta - 2\mu) \right] - \frac{\Gamma}{2\pi \rho} \sin \mu + \frac{I}{4\pi d} \sin \mu;$$

$$V_0 \sin \gamma_0 = v_0 = V_\infty \left[\sin \theta + \frac{1}{\rho} \sin (\theta - 2\mu) \right] + \frac{\Gamma}{2\pi \rho} \cos \mu - \frac{I}{4\pi d} \cos \mu.$$

Отсюда можно найти V_0 и γ_0 .

5. Определение интенсивности добавочного вихря

Будем рассматривать щиток, как плоскую пластинку; тогда применяя известную формулу, получим величину циркуляции вокруг пластинки:

$$I = \pi V_\infty b \beta^1 \quad (46)$$

β — угол атаки относительно набегающего на щиток потока. Рассматриваем крыло типа инверсии парабол; тогда отображающая функция будет²:

$$\zeta = e^{-\frac{\alpha}{2}i} (z - 1) - (1 - \varepsilon) \cos \frac{\alpha}{2} + \frac{\cos \frac{\alpha}{2} (1 - \varepsilon)^2}{(z - 1) e^{-\frac{\alpha}{2}i} + (1 - \varepsilon) \cos \frac{\alpha}{2}}. \quad (47)$$

Радиус скелета равен $\frac{1 - \varepsilon}{\sin \frac{\alpha}{2}}$,

2α — центральный угол скелета,

ε — коэффициент, характеризующий толщину.

$$\frac{d\zeta}{dz} = e^{-\frac{\alpha}{2}i} \left\{ 1 - \frac{(1 - \varepsilon)^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\left[(z - 1) e^{-\frac{\alpha}{2}i} + (1 - \varepsilon) \cos \frac{\alpha}{2} \right]^2} \right\}. \quad (48)$$

При $z = \infty$

$$\left(\frac{d\zeta}{dz} \right)_{z=\infty} = e^{-\frac{\alpha}{2}i}, \quad \frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz},$$

$$V_\infty e^{-\theta i} = V e^{-\lambda i - \frac{\alpha}{2}i},$$

V — скорость в бесконечности на ζ ,

λ — угол, образованный этой скоростью с действительной осью

$$V_\infty = V; \quad \theta = \lambda + \frac{\alpha}{2}. \quad (49)$$

¹ См., например, В. В. Голубев. Теория крыла конечного размаха. Стр. 161.

² В. В. Голубев. Исследование по теории разрезного крыла. Труды ЦАГИ, вып. 147, 1933. Стр. 29.

Полагая $z = e^{\varphi i}$, получим V_ζ на крыле (V_φ — скорость на цилиндре)

$$\dot{V}_\zeta = V_\varphi : \frac{d\zeta}{dz}.$$

$$\left| \frac{d\zeta}{dz} \right| = \left| e^{-\frac{\alpha}{2}i} \frac{(z-1) \left[(z-1) e^{-\frac{\alpha}{2}i} + 2(1-\varepsilon) \cos \frac{\alpha}{2} \right]}{\left[(z-1) e^{-\frac{\alpha}{2}i} + (1-\varepsilon) \cos \frac{\alpha}{2} \right]^2} \right|$$

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{(z-1)(z+1-2\varepsilon)}{(z-\varepsilon)^2}. \quad (50)$$

Будем пренебрегать изогнутостью крыла $\alpha = 0$. Найдем $\frac{dw}{d\zeta}$ пользуясь (2).

$$\frac{d\zeta}{dz} = \left\{ V_\infty e^{-\theta i} \left(1 - \frac{e^{2\theta i}}{z^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z} + \frac{I}{2\pi i} \left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-\bar{a}} \right) \right\} \frac{(z-\varepsilon)^2}{(z-1)(z+1-2\varepsilon)}. \quad (51)$$

Найдем скорость в оси вихря ($z=a$); для этого в (51) надо опустить член $\frac{I}{2\pi i(z-a)}$ и положить $z=a$.

$$V_a = \left| V_\infty e^{-\theta i} \left(1 - \frac{e^{2\theta i}}{a^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{a} - \frac{I}{2\pi i} \frac{1}{a-\bar{a}} \right| \cdot \frac{(a-\varepsilon)^2}{|a-1| \cdot |a+1-2\varepsilon|}. \quad (52)$$

Но

$$a = \rho e^{\mu i}$$

$$|a-\varepsilon|^2 = |\rho \cos \mu - \varepsilon + i\rho \sin \mu|^2 = \rho^2 - 2\rho\varepsilon \cos \mu + \varepsilon^2,$$

$$|a-1| = |\rho \cos \mu - 1 + i\rho \sin \mu| = \sqrt{\rho^2 - 2\rho \cos \mu + 1},$$

$$|a+1-2\varepsilon| = \sqrt{\rho^2 + 2\rho(1-2\varepsilon) \cos \mu + (1-2\varepsilon)^2},$$

$$\left| V_\infty e^{-\theta i} \left(1 - \frac{e^{2\theta i}}{a^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{a} - \frac{I}{2\pi i} \frac{1}{a-\bar{a}} \right| =$$

$$= \left| V_\infty e^{-\theta i} \left(1 - \frac{1}{\rho^2} e^{2(\theta-\mu)i} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{e^{-\mu i}}{\rho} - \frac{I e^{-\mu i}}{2\pi i \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right)} \right| =$$

$$= \left| i V_\infty e^{-(\theta-\mu)i} \left(1 - \frac{1}{\rho^2} e^{2(\theta-\mu)i} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{\rho} - \frac{I}{2\pi} \frac{1}{\rho - \frac{1}{\rho}} \right| =$$

$$= \left| i V_\infty \cos(\theta-\mu) - i \frac{1}{\rho^2} \cos(\theta-\mu) + V_\infty \sin(\theta-\mu) + \frac{1}{\rho^2} V_\infty \sin(\theta-\mu) + \frac{\Gamma}{2\pi\rho} - \frac{I}{2\pi} \frac{1}{\rho - \frac{1}{\rho}} \right| =$$

$$= \sqrt{\left\{ V_\infty \left(1 + \frac{1}{\rho^2} \right) \sin(\theta-\mu) + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{\rho} - \frac{I}{2\pi} \frac{1}{\rho - \frac{1}{\rho}} \right\}^2 + V_\infty^2 \left(1 - \frac{1}{\rho^2} \right)^2 \cos^2(\theta-\mu)}.$$

Подставляем v_a из формулы (46) и возводим все в квадрат.

$$\begin{aligned} \frac{I^2}{\pi^2 b^2 \beta^2} = V_\infty^2 & \left\{ 1 - \frac{2}{\rho^2} \cos 2(\theta - \mu) + \frac{1}{\rho^4} + 2 \sin(\theta - \mu) \left(1 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{\rho^2} \right) \left[\frac{\Gamma}{2\pi V_\infty} \frac{1}{\rho} - \frac{I}{2\pi V_\infty} \frac{1}{\rho - \frac{1}{\rho}} \right] + \left[\frac{\Gamma}{2\pi V_\infty} \frac{1}{\rho} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{I}{2\pi V_\infty} \frac{1}{\rho - \frac{1}{\rho}} \right]^2 \right\} \frac{[\rho^2 - 2\varepsilon \rho \cos \mu + \varepsilon^2]^2}{(\rho^2 - 2\rho \cos \mu + 1)} \times \\ & \times \frac{1}{\rho^2 + 2(1 - 2\varepsilon)\rho \cos \mu + (1 + 2\varepsilon)^2}. \end{aligned} \quad (53)$$

Если в (53) подставить (38), то для I получим квадратное уравнение. По характеру задачи I надо взять отрицательное значение.

Положим $\frac{I}{2\pi b \beta V_\infty} = X$. Подставим в (53)

$$\begin{aligned} X^2 \cdot 4 \frac{(\rho^2 - 2\rho \cos \mu + 1)[\rho^2 + 2(1 - 2\varepsilon)\rho \cos \mu + (1 - 2\varepsilon)^2]}{[\rho^2 - 2\varepsilon \rho \cos \mu + \varepsilon^2]^2} = \\ = 1 - \frac{2}{\rho^2} \cos 2(\theta - \mu) + \frac{1}{\rho^4} + 2 \sin(\theta - \mu) \left\{ -\frac{2 \sin \theta}{\rho} + \right. \\ \left. + X b \beta \left[\frac{d}{\rho} \left(1 + \frac{1}{\rho^2} \right) \frac{1}{r - \cos \mu} - \frac{1}{2d} \right] \right\} + \\ + \left\{ -\frac{2 \sin \theta}{\rho} + X b \beta \left[\frac{d}{\rho} \frac{1}{r - \cos \mu} - \frac{1}{2d} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Члены, содержащие множитель $b\beta$, малы, так как b — хорда щитка не превосходит 0,2 хорды основной части, которая имеет величину, при радиусе основного круга, равного единице, около 4. Таким образом $b < 0,8$. Угол атаки щитка порядка $15-20^\circ$, поэтому $\beta < 0,3$, а потому $b\beta < 0,25$ и величина в скобках порядка $\frac{1}{2}$. Отбрасывание этих членов дает ошибку 5%. Пользуясь для I таким упрощением, получим для I следующее значение:

$$\begin{aligned} I = -\pi b \beta V_\infty \sqrt{1 - \frac{2}{\rho^2} \cos 2(\mu - \theta) + \frac{1}{\rho^4} + 4 \sin(\mu - \theta) \sin \theta \frac{1}{\rho} \left(1 + \frac{1}{\rho^2} \right) + \frac{4 \sin^2 \theta}{\rho^2}} \times \\ \times \frac{\rho^2 - 2\rho \varepsilon \cos \mu - \varepsilon^2}{\sqrt{\rho^2 - 2\rho \cos \mu + 1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + 2(1 - 2\varepsilon)\rho \cos \mu + (1 - 2\varepsilon)^2}}. \end{aligned} \quad (54)$$

Выражение (54) для I можно упростить; простым перемножением можно убедиться в справедливости следующего:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{2}{\rho^2} \cos 2(\mu - \theta) + \frac{1}{\rho^4} + 4 \sin(\mu - \theta) \sin \theta \frac{1}{\rho} \left(1 + \frac{1}{\rho^2} \right) + \frac{4 \sin^2 \theta}{\rho^2} = \\ = \left(1 + \frac{2 \cos 2(\mu - \theta)}{\rho} + \frac{1}{\rho^2} \right) \left(1 - \frac{2 \cos \mu}{\rho} + \frac{1}{\rho^2} \right). \end{aligned}$$

Отсюда получим окончательную формулу для I :

$$I = -\pi b \beta V_{\infty} \sqrt{1 + \frac{2 \cos 2(\mu + 2\theta)}{\rho} + \frac{1}{\rho^2}} \times \frac{\rho^2 - 2\rho\varepsilon \cos \mu + \varepsilon^2}{\rho \sqrt{\rho^2 + 2(1 - 2\varepsilon)\rho \cos \mu + (1 - 2\varepsilon)^2}}. \quad (54')$$

Эта формула позволяет весьма просто рассчитать величину I по заданным конструктивным данным и по заданной величине угла атаки крыла θ .

Рассмотрим два крайних случая.

1. $\mu = \frac{\pi}{2}$. Щиток над крылом

$$1 + \frac{2 \cos 2\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)}{\rho} + \frac{1}{\rho^2} = 1 + \frac{2 \sin 2\theta}{\rho} + \frac{1}{\rho^2};$$

$$\rho^2 - 2\rho\varepsilon \cos \frac{\pi}{2} + \varepsilon^2 = \rho^2 + \varepsilon^2;$$

$$\rho^2 + 2(1 - 2\varepsilon)\rho \cos \frac{\pi}{2} + (1 - 2\varepsilon)^2 = \rho^2 + (1 - 2\varepsilon)^2;$$

$$I = -\pi b \beta V_{\infty} \sqrt{\rho^2 + 2 \sin 2\theta \rho + 1} \frac{\rho^2 + \varepsilon^2}{\rho^2 \sqrt{\rho^2 + (1 - 2\varepsilon)^2}}. \quad (55)$$

2. $\mu = -\frac{\pi}{2}$. Щиток под крылом.

$$1 + \frac{2 \cos 2\left(\frac{\pi}{2} + 2\theta\right)}{\rho} + \frac{1}{\rho^2} = 1 - \frac{2 \sin 2\theta}{\rho} + \frac{1}{\rho^2};$$

$$\rho^2 - 2\rho\varepsilon \cos \frac{\pi}{2} + \varepsilon^2 = \rho^2 + \varepsilon^2;$$

$$\rho^2 + 2(1 - 2\varepsilon)\rho \cos \frac{\pi}{2} + (1 - 2\varepsilon)^2 = \rho^2 - (1 - 2\varepsilon)^2;$$

$$I = -\pi b \beta V_{\infty} \sqrt{\rho^2 - 2 \sin 2\theta \rho + 1} \frac{\rho^2 + \varepsilon^2}{\rho^2 \sqrt{\rho^2 + (1 - 2\varepsilon)^2}}. \quad (55')$$

6. Теория работы щитка над крылом

Выведенные формулы позволяют изучить влияние щитка над крылом на подъемную силу крыла. Как видно из предыдущего, действие щитка над крылом сводится к следующему:

1. Изменяются условия обтекания, благодаря чему увеличивается предельный угол атаки; это увеличение является следствием двух следующих факторов:

а) благодаря изменению распределения скоростей получается смещение критической точки разделения струй, соответствующее увеличению угла атаки на величину δ ;

б) благодаря выравниванию скоростей на верхней поверхности крыла, вызываемому появлением множителя L .

2. Благодаря изменению величины циркуляции получается увеличение подъемной силы крыла.

Исследуем влияние каждого фактора в отдельности. Скорость в точке крыла при наличии щитка V_ζ и соответствующая скорость без щитка V_ζ° выражаются следующими формулами:

$$V_\zeta = V_\infty \sin \frac{\varphi - (\pi + 2\theta + 2\delta)}{2} \cdot L \frac{(1-\varepsilon)^2 \cos \frac{\alpha}{2} - 4(1-\varepsilon) \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi - \alpha}{2} + 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{(1-\varepsilon)^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 2(1-\varepsilon) \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi - \alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}}} \quad (56)$$

$$V_\zeta^\circ = V_\infty \sin \frac{\varphi - (\pi + 2\theta_0)}{2} \frac{(1-\varepsilon)^2 \cos \frac{\alpha}{2} - 4(1-\varepsilon) \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi - \alpha}{2} + 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{(1-\varepsilon)^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 2(1-\varepsilon) \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi - \alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}}} \quad (57)$$

Сравнивая (56) и (57), мы видим, что:

$$V_\zeta = V_\zeta^\circ \frac{\sin \frac{\varphi - (\pi + 2\theta + 2\delta)}{2}}{\sin \frac{\varphi - (\pi + 2\theta_0)}{2}} \cdot L. \quad (58)$$

Таким образом влияние щитка на распределение скоростей сказывается в появлении угла δ и множителя L . В области передней кромки, где образование больших скоростей вызывает отрыв струй $L < 1$ и, следовательно, $V_\zeta < V_\zeta^\circ$. Без опасения образования отрыва струй можно θ увеличить таким образом, чтобы V_ζ равнялось V_ζ° , вычисленному при θ_0 , равном предельному углу атаки крыла без щитка. Подберем угол θ таким образом, чтобы

$$\sin \frac{\varphi - (\pi + 2\theta + 2\delta)}{2} = \sin \frac{\varphi - (\pi + 2\theta_0)}{2},$$

отсюда

$$\theta = \theta_0 - \delta. \quad (59)$$

Итак, замечая, что V_ζ зависит от θ и V_ζ° от θ_0 , при этом условии можем написать:

$$V_\zeta(\theta_0 - \delta) = V_\zeta^\circ(\theta_0) \cdot L. \quad (60)$$

$L < 1$ и, следовательно, $V_\zeta(\theta_0 - \delta) < V_\zeta^\circ(\theta_0)$. Не опасаясь образования отрыва струй, мы можем увеличить θ_0 таким образом, чтобы

$$V_\zeta(\theta_0 + \Delta\theta - \delta) = V_\zeta^\circ(\theta_0). \quad (61)$$

При изменении θ_0 меняется и $V_\zeta^\circ(\theta_0)$ и L , найдем их изменения.

Из уравнения (2) при $I=0$, т. е. без щитка, имеем при $z = e^{\varphi i}$

$$\frac{dw}{dz} = V_\infty e^{-\theta i} (1 - e^{2(\theta-1)i}) + \frac{\Gamma}{2\pi i} e^{-\varphi i}.$$

Откуда:

$$V_\zeta^\circ(\theta_0) = \left| \frac{dw}{dz} \right| = \left| 2V_\infty \sin(\theta_0 - \varphi) + \frac{\Gamma}{2\pi} \right|$$

и, заменяя Γ из (38) (при $I=0$), имеем:

$$V_\zeta^\circ(\theta_0) = 2V_\infty [\sin(\varphi - \theta_0) + \sin \theta_0]. \quad (62)$$

¹ В. В. Голубев. Исследование по теории разрезного крыла. Труды ЦАГИ, вып. 147, 1933. Стр. 31. Формула (18) $\cos\left(\theta - \frac{\lambda}{2}\right)$ заменено через $\sin \frac{\lambda - \pi - 2\theta}{2}$ и $\lambda = \varphi$.

Из формулы (62) имеем:

$$\Delta V_{\zeta}^{\circ} = 2V_{\infty} [-\cos(\varphi - \theta_0) + \cos \theta_0] \Delta \theta = 4V_{\infty} \sin \frac{\varphi}{2} \sin \left(\frac{\varphi}{2} - \theta_0 \right). \quad (63)$$

Так как по (62) имеем:

$$V_{\zeta}(\theta_0) = 4V_{\infty} \sin \frac{\varphi}{2} \cos \left(\frac{\varphi}{2} - \theta_0 \right). \quad (64)$$

Из (63) и (64) имеем:

$$\frac{\Delta V_{\zeta}^{\circ}}{V_{\zeta}^{\circ}(\theta_0)} = \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} - \theta_0 \right) \Delta \theta. \quad (65)$$

Окончательно имеем:

$$V_{\zeta}^{\circ}(\theta_0 + \Delta \theta_0) = V_{\zeta}^{\circ}(\theta_0) + \Delta V_{\zeta}^{\circ} = V_{\zeta}^{\circ}(\theta_0) \left[1 + \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} - \theta_0 \right) \Delta \theta \right]. \quad (66)$$

С другой стороны, по (36)

$$L = \frac{S - \cos(\varphi - (\mu - \delta))}{r - \cos(\varphi - \mu)} = 1 - \frac{r - S - \cos(\varphi - \mu) + \cos(\varphi - (\mu - \delta))}{r - \cos(\varphi - \mu)}$$

или, полагая $L = 1 - \Delta L$, имеем:

$$\Delta L = \frac{r - S - \cos(\varphi - \mu) + \cos(\varphi - (\mu - \delta))}{r - \cos(\varphi - \mu)}.$$

Так как по (29)

$$r - S = \delta \left[r \operatorname{tg}(\mu - \theta) + \frac{\sin \theta}{\cos(\theta - \mu)} \right]$$

и

$$\cos[\varphi - (\mu - \delta)] - \cos(\varphi - \mu) = -2 \sin \left(\varphi - \mu + \frac{\delta}{2} \right) \sin \frac{\delta}{2},$$

то

$$\Delta L = \delta \frac{\left[r \operatorname{tg}(\mu - \theta) + \frac{\sin \theta}{\cos(\theta - \mu)} \right] - 2 \sin \left(\varphi - \mu + \frac{\delta}{2} \right) \sin \frac{\delta}{2}}{r - \cos(\varphi - \mu)}.$$

Можно придать этому выражению более симметричный вид. Для этого заметим, что по (37') имеем:

$$r \operatorname{tg}(\mu - \theta) + \frac{\sin \theta}{\cos(\theta - \mu)} = \sin \left[\varphi_1 - \left(\mu - \frac{\delta}{2} \right) \right].$$

Отсюда заменяя $2 \sin \frac{\delta}{2}$ через δ :

$$\Delta L = \delta \frac{\sin \left[\varphi_1 - \left(\mu - \frac{\delta}{2} \right) \right] - \sin \left[\varphi - \left(\mu - \frac{\delta}{2} \right) \right]}{r - \cos(\varphi - \mu)} \quad (67)$$

или

$$\Delta L = -2\delta \frac{\sin \frac{\varphi - \varphi_1}{2} \cdot \cos \frac{\varphi + \varphi_1 - 2\mu + \delta}{2}}{r - \cos(\varphi - \mu)}.$$

Но из (37') имеем:

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 2\mu - \delta + \pi \text{ и } \varphi - 2\mu + \delta = \pi - \varphi_2.$$

Следовательно:

$$\Delta L = -2\delta \frac{\sin \frac{\varphi - \varphi_1}{2} \cos \frac{\pi + (\varphi - \varphi_2)}{2}}{r - \cos(\varphi - \mu)}$$

или в следующем весьма симметричном виде:

$$\Delta L = -2\delta \frac{\sin \frac{\varphi - \varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_2 - \varphi}{2}}{r - \cos(\varphi - \mu)}. \quad (68)$$

Подставляя все это в уравнение (61), имеем, заменяя

$$V_{\zeta}(\theta_0 - \delta) = V_{\zeta}^{\circ}(\theta_0)L:$$

$$V_{\zeta}^{\circ}(\theta_0) \left[1 + \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} - \theta_0 \right) \Delta \theta \right] [1 - \Delta L] = V_{\zeta}^{\circ}(\theta_0).$$

Отсюда, ограничиваясь первыми степенями малых величин $\Delta \theta$ и ΔL , имеем:

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} - \theta_0 \right) \Delta \theta - \Delta L = 0 \quad (69)$$

и допустимый прирост угла определится формулой:

$$\Delta \theta = \frac{\Delta L}{\operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} - \theta_0 \right)} = 2\delta \frac{\sin \frac{\varphi - \varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi - \varphi_2}{2}}{[r - \cos(\varphi - \mu)] \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} - \theta_0 \right)}. \quad (70)$$

Уравнение (61) должно выполняться в области передней кромки. Пусть наибольшая скорость в точке $\varphi = \nu$, причем ν близко к π . Тогда мы потребуем, чтобы уравнение (70) выполнялось при $\varphi = \nu$.

$$\Delta \theta = 2\delta \frac{\sin \frac{\nu - \varphi_1}{2} \sin \frac{\nu - \varphi_2}{2}}{[r - \cos(\nu - \mu)] \operatorname{tg} \left(\frac{\nu}{2} - \theta_0 \right)}; \quad (71)$$

$$\varphi_1 = \mu - \frac{\delta}{2} + \operatorname{arc} \sin \frac{r - S}{\delta};$$

$$\varphi_2 = \mu - \frac{\delta}{2} + \pi - \operatorname{arc} \sin \frac{r - S}{\delta}.$$

Подставляя в выражение для $\Delta \theta$

$$\Delta \theta = 2\delta \frac{\sin \frac{\nu - \mu + \frac{\delta}{2} - \operatorname{arc} \sin \frac{r - S}{\delta}}{2} \sin \frac{\nu - \mu + \frac{\delta}{2} - \pi + \operatorname{arc} \sin \frac{r - S}{\delta}}{2}}{[r - \cos(\nu - \mu)] \operatorname{tg} \left(\frac{\nu}{2} - \theta_0 \right)}.$$

Полагаем

$$\mu = \frac{\pi}{2}$$

и

$$\Delta\theta = 2\delta \frac{\sin \frac{\frac{\pi}{2} + \frac{\delta}{2} - \arcsin \frac{r-S}{\delta}}{2} \sin \frac{-\frac{\pi}{2} + \frac{\delta}{2} + \arcsin \frac{r-S}{\delta}}{2}}{r \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right)}.$$

Применим формулу:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\cos \alpha - \cos \beta) &= \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2}; \\ \alpha + \beta &= -\frac{\pi}{2} + \frac{\delta}{2} + \arcsin \frac{r-S}{\delta}; \quad 2\beta = 2\delta; \\ \beta - \alpha &= \frac{\pi}{2} + \frac{\delta}{2} - \arcsin \frac{r-S}{\delta}; \quad 2\alpha = -\pi + 2 \arcsin \frac{r-S}{\delta}; \\ \beta &= \frac{\delta}{2}; \quad \alpha = -\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{r-S}{\delta}; \\ \sin \frac{\frac{\pi}{2} + \frac{\delta}{2} - \arcsin \frac{r-S}{\delta}}{2} \cdot \sin \frac{-\frac{\pi}{2} + \frac{\delta}{2} + \arcsin \frac{r-S}{\delta}}{2} &= \\ &= \frac{1}{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{r-S}{\delta} \right) - \cos \frac{\delta}{2} \right]. \end{aligned}$$

Заменяем приближенно

$$\begin{aligned} \cos \frac{\delta}{2} &\approx 1 \\ \sin \frac{\frac{\pi}{2} + \frac{\delta}{2} - \arcsin \frac{r-S}{\delta}}{2} \cdot \sin \frac{-\frac{\pi}{2} + \frac{\delta}{2} + \arcsin \frac{r-S}{\delta}}{2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{r-S}{\delta} - 1 \right). \end{aligned}$$

Подставляем в выражение для $\Delta\theta$:

$$\Delta\theta = \frac{r-S-\delta}{r \operatorname{ctg} \theta}. \quad (72)$$

Возвращаясь к формуле (59), имеем для предельного угла атаки

$$\theta = \theta_0 + \Delta\theta - \delta$$

и полное увеличение предельного угла атаки от действия предкрылка выражается величиной:

$$\Delta\theta_1 = \Delta\theta - \delta. \quad (73)$$

По формуле (30) имеем:

$$r-S = \delta [r \operatorname{ctg} \theta + 1].$$

Подставляем в (72)

$$\Delta\theta = \frac{\delta r \operatorname{ctg} \theta + \delta - \delta}{r \operatorname{ctg} \theta} = 0.$$

Отсюда получаем:

$$\Delta_1\theta = 0. \quad (74)$$

Переходим теперь к учету изменения подъемной силы при предельном угле атаки при действии щитка над крылом. По формуле (38)

$$\Gamma(\theta) = -\pi 4 V_{\infty} \sin \theta + I(\theta) \frac{d}{r - \cos \mu}.$$

В нашем случае $\mu = \frac{\pi}{2}$.

$$\Gamma(\theta_0) = -4\pi V_{\infty} \sin \theta_0 + I \frac{d}{r}.$$

Циркуляция при отсутствии щитка при предельном угле атаки θ_0 определяется формулой:

$$\Gamma_0(\theta_0) = -4\pi V_{\infty} \sin \theta_0.$$

Приращение Γ будет следующее:

$$\Gamma(\theta_0) - \Gamma_0(\theta_0) = \Delta\Gamma = I \frac{d}{r}, \quad |\Delta\Gamma| = |I| \frac{d}{r}.$$

Отсюда увеличение подъемной силы от действия щитка под крылом будет:

$$\Delta_1 P = \sigma V_{\infty}^2 |I(\theta_0)| \frac{\rho^2 - 1}{\rho^2 + 1}. \quad (75)$$

В этом случае I будет определяться по формуле (55)

$$I = -\pi b \beta V_{\infty} \sqrt{\rho^2 + 2 \sin 2\theta_0 \cdot \rho + 1} \cdot \frac{\rho^2 + \varepsilon^2}{\rho^2 + \sqrt{\rho^2 + (1 - 2\varepsilon)^2}};$$

$$\Delta_1 P = \sigma V_{\infty}^2 \pi b \beta \sqrt{\rho^2 + 2 \sin 2\theta_0 \rho + 1} \cdot \frac{\rho^2 + \varepsilon^2}{\rho^2 \sqrt{\rho^2 + (1 - 2\varepsilon)^2}} \frac{\rho^2 - 1}{\rho^2 + 1}. \quad (76)$$

Так как подъемная сила крыла без щитка при предельном угле атаки будет

$$P = \sigma V_{\infty}^2 \sin \theta_0 \cdot 4\pi,$$

то окончательно получим следующую формулу:

$$\frac{\Delta_1 P}{P} = \frac{b\beta}{4 \sin \theta_0} \sqrt{\rho^2 + 2 \sin 2\theta_0 \cdot \rho + 1} \frac{\rho^2 + \varepsilon^2}{\rho^2 \sqrt{\rho^2 + (1 - 2\varepsilon)^2}} \frac{\rho^2 - 1}{\rho^2 + 1}. \quad (76')$$

7. Теория работы щитка под крылом

Теория работы щитка под крылом во многом совершенно похожа на изложенную выше теорию работы щитка над крылом. Формулы (56), (57) и (58) остаются здесь без всякого изменения, но для щитка под крылом $\delta < 0$ и L иначе влияет на условие обтекания.

Повторяя предшествующие рассуждения, определим в формуле:

$$V_{\zeta} = V_{\zeta}^{\circ} \frac{\frac{\sin [\varphi - (\pi + 2\theta + 2\delta)]}{2}}{\sin \frac{\varphi - (\pi - 2\theta_0)}{2}} L \quad (58)$$

θ таким образом, чтобы $\sin \frac{\varphi - (\pi + 2\theta + 2\delta)}{2} = \sin \frac{\varphi - (\pi + 2\theta_0)}{2}$, для чего надо положить:

$$\theta = \theta_0 - \delta. \quad (77)$$

Так как $L > 1$ для щитка под крылом в области передней кромки $V_{\zeta}(\theta_0 - \delta) > V_{\zeta}^{\circ}(\theta_0)$, то, чтобы не было отрыва струй надо уменьшить θ_0 таким образом, чтобы:

$$V_{\zeta}(\theta_0 - \Delta\theta - \delta) = V_{\zeta}^{\circ}(\theta_0); \quad (78)$$

$$V_{\zeta}(\theta_0 - \delta) = V_{\zeta}^{\circ}(\theta_0) \cdot L. \quad (79)$$

По (66) получим, меняя знак у $\Delta\theta$:

$$V_{\zeta}(\theta_0 - \Delta\theta) = V_{\zeta}^{\circ}(\theta_0) \left[1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2} - \theta_0\right) \Delta\theta \right] \quad (80)$$

и полагая здесь: $L = 1 + \Delta L$, по (79) можем написать:

$$V_{\zeta}(\theta_0 - \Delta\theta - \delta) = V_{\zeta}^{\circ}(\theta_0) \left[1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2} - \theta_0\right) \Delta\theta \right] [1 + \Delta L] \quad (81)$$

или, заменяя левую половину по (78), получим, ограничиваясь первыми степенями малых величин $\Delta\theta$ и ΔL ,

$$\begin{aligned} \Delta L - \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2} - \theta_0\right) \Delta\theta &= 0, \\ \Delta\theta &= \frac{\Delta L}{\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2} - \theta_0\right)}. \end{aligned} \quad (82)$$

Пусть наибольшая скорость получается в $\varphi = \nu$, причем ν близко к π . Тогда мы потребуем, чтобы уравнение (82) выполнялось при $\varphi = \nu$. Заменяя ΔL из (68), причем необходимо переменить знак, получим:

$$\Delta L = \frac{2\delta \sin \frac{\nu - \varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_2 - \nu}{2}}{r - \cos(\nu - \mu)}$$

и

$$\Delta\theta = 2\delta \frac{\sin \frac{\nu - \varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_2 - \nu}{2}}{[r - \cos(\nu - \mu)] \operatorname{tg}\left(\frac{\nu}{2} - \theta_0\right)}.$$

В случае щитка под крылом

$$\mu = -\frac{\pi}{2}, \quad \nu = \pi.$$

$$\varphi_1 = \mu - \frac{\delta}{2} + \arcsin \frac{r-S}{\delta} = -\frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2} + \arcsin \frac{r-S}{\delta};$$

$$\varphi_2 = \mu - \frac{\delta}{2} + \pi - \arcsin \frac{r-S}{\delta} = \frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2} - \arcsin \frac{r-S}{\delta};$$

$$\Delta\theta = 2\delta \frac{\sin \frac{\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\delta}{2} - \arcsin \frac{r-S}{\delta}}{2} \cdot \sin \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2} - \arcsin \frac{r-S}{\delta} - \pi}{2}}{\left[r - \cos\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) \right] \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right)};$$

$$\Delta\theta = 2\delta \frac{\sin \frac{\frac{3\pi}{2} + \frac{\delta}{2} - \arcsin \frac{r-S}{\delta}}{2} \cdot \sin \frac{-\frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2} - \arcsin \frac{r-S}{\delta}}{2}}{r \operatorname{ctg} \theta};$$

$$\frac{1}{2}(\cos \alpha - \cos \beta) = \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\beta - \alpha}{2}.$$

Воспользуемся этой формулой:

$$\alpha + \beta = \frac{3\pi}{2} + \frac{\delta}{2} - \arcsin \frac{r-S}{\delta},$$

$$\beta - \alpha = -\frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2} - \arcsin \frac{r-S}{\delta},$$

$$\alpha = \pi + \frac{\delta}{2},$$

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{r-S}{\delta},$$

$$\begin{aligned} & \sin \frac{\frac{3\pi}{2} + \frac{\delta}{2} - \arcsin \frac{r-S}{\delta}}{2} \cdot \sin \frac{-\frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2} - \arcsin \frac{r-S}{\delta}}{2} = \\ & = \frac{1}{2} \left[\cos \left(\pi + \frac{\delta}{2} \right) - \cos \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{r-S}{\delta} \right) \right] = \frac{1}{2} \left(-\cos \frac{\delta}{2} - \frac{r-S}{\delta} \right). \end{aligned}$$

Полагаем $\cos \frac{\delta}{2} \approx 1$, тогда для $\Delta\theta$ получим выражение:

$$\Delta\theta = \frac{-\delta - r + S}{r \operatorname{ctg} \theta}, \quad \Delta\theta = \frac{S - r - \delta}{r \operatorname{ctg} \theta}. \quad (83)$$

Возвращаясь к формуле (77)

$$\theta = \theta_0 - \Delta\theta - \delta,$$

$$\Delta_2\theta = -\Delta\theta - \delta.$$

Так как в рассматриваемом случае по формуле (30')

$$S - r = -\delta [r \operatorname{ctg} \theta - 1],$$

то (83) принимает вид:

$$\Delta\theta = \frac{-\delta r \operatorname{ctg} \theta + \delta - \delta}{r \operatorname{ctg} \theta} = -\delta.$$

Отсюда имеем:

$$\Delta_2\theta = 0. \quad (84)$$

Переходим теперь к учету изменения подъемной силы при предельном угле атаки при действии щитка под крылом. Пользуясь формулой (38) и полагая $\mu = -\frac{\pi}{2}$, совершенно так же, как и в предыдущем параграфе, получим [формула (75)]

$$\Delta_2 P = \sigma V_\infty |I(\theta_0)| \frac{\rho^2 - 1}{\rho^2 + 1}.$$

В этом случае I будет определяться по формуле (55')

$$I = -\pi b \beta V_{\infty} \sqrt{\rho^2 - 2 \sin 2\theta \cdot \rho + 1} \frac{\rho^2 + \varepsilon^2}{\rho^2 \sqrt{\rho^2 + (1 - 2\varepsilon)^2}} \frac{\rho^2 - 1}{\rho^2 + 1};$$

$$\Delta_2 P = \sigma V_{\infty}^2 \pi b \beta \sqrt{\rho^2 - 2 \sin 2\theta \cdot \rho + 1} \frac{\rho^2 + \varepsilon^2}{\rho^2 \sqrt{\rho^2 + (1 - 2\varepsilon)^2}}. \quad (85)$$

Так как подъемная сила крыла без щитка при предельном угле атаки будет:

$$P = \sigma V_{\infty}^2 \cdot \sin \theta_0 \cdot 4\pi,$$

то окончательно получим следующую формулу:

$$\frac{\Delta_2 P}{P} = \frac{b \beta}{4 \sin \theta_0} \sqrt{\rho^2 - 2 \sin 2\theta_0 \cdot \rho + 1} \frac{\rho^2 + \varepsilon^2}{\rho^2 \sqrt{\rho^2 + (1 - 2\varepsilon)^2}} \cdot \frac{\rho^2 - 1}{\rho^2 + 1}. \quad (86)$$

Результаты параграфов 6 и 7, т. е. $\Delta_1 \theta = \Delta_2 \theta = 0$, показывают, что смещение критических точек около передней кромки будет очень мало, в наших приближениях (где пренебрегаем θ в степенях выше первой) оно будет равно нулю. В случае $\theta = 0$ для надкрылка и подкрылка этот результат очевиден. То же самое очевидно для случая любого угла атаки, если щитки поставить в точках $\mu = \theta \pm \frac{\pi}{2}$, это можно показать пользуясь формулой (15')

$$\frac{dw}{dz} = 4 V e^{-\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)i} \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \left[\cos \left(\theta - \frac{\varphi}{2} \right) - K \frac{\sin \left(\frac{\varphi}{2} - \mu \right)}{\cos (\varphi - \mu) - r} \right]. \quad (15')$$

При

$$\mu = \theta \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\sin \left(\frac{\varphi}{2} - \mu \right) = \sin \left(\frac{\varphi}{2} - \theta \pm \frac{\pi}{2} \right) = \mp \cos \left(\theta - \frac{\varphi}{2} \right).$$

Следовательно, уравнение (15') принимает вид:

$$\frac{dw}{dz} = 4 V e^{-\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)i} \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi - (2\theta \pm \pi)}{2} \left[1 \pm \frac{K}{\cos \left(\varphi - \theta \pm \frac{\pi}{2} \right) - r} \right]$$

и потому двумя критическими точками течения служат точки:

$$\varphi_1 = 0; \quad \varphi_2 = 2\theta + \pi,$$

т. е. в этом случае положение двух критических точек остается такое же, как если бы добавочного вихря не было. В формулы, определяющие смещение критической точки для надкрылка и подкрылка, θ входит через δ^n делителя $r \operatorname{ctg} \theta$; первые степени этих величин пропадают, а влияние $\frac{\delta^n}{r \operatorname{ctg} \theta}$ при $n > 1$ на величину $\Delta_1 \theta$ и $\Delta_2 \theta$ при $\theta_0 = 15^\circ$ будет очень мало. Следовательно, θ почти не влияет на смещение критических точек в случае надкрылка и подкрылка, т. е. эти случаи очень близки к случаю или $\theta = 0$ или

$$\mu = \theta \pm \frac{\pi}{2}.$$

8. Предельный угол атаки для щитков

Присутствие основной части крыла должно оказывать весьма существенное влияние на условия обтекания добавочных крыльев. Мы разберем здесь это влияние в случае щитка-подкрылка. В этом случае основная часть крыла является для щитка предкрылком сочень большою хордою. Поэтому здесь не приложено исходное положение, которое принималось нами во всем предыдущем: здесь нельзя пренебрегать хордой основной части. Однако, полученные выше выводы можно, конечно, применять и здесь в качестве некоторого приближения к решению задачи, так как на некотором расстоянии от крыла течение весьма мало отличается от течения около одиночного вихря. Дальнейшие выводы будут таким образом тем ближе к действительности, чем дальше предкрылок находится от основной части крыла. Так как формула, дающая отображение круглого цилиндра радиуса равного единице на щиток с хордою равную четырем, имеет вид:

$$\zeta = z + \frac{1}{z},$$

то, замечая, что ось вихря находилась от середины щитка на расстоянии равном 1,5 хорды, мы получим для этого расстояния, выраженного в радиусах первоначального цилиндра, величину 6, откуда для определения ρ получим уравнение:

$$\rho + \frac{1}{\rho} = 6,$$

$$\rho_1 = 5,8, \quad \rho_2 = 0,1.$$

ρ надо принять равным 5—6.

Формула увеличения угла в случае предкрылка может быть получена тем же методом, как для надкрылка или подкрылка, если положить $\mu = \pi$, окончательно она будет иметь вид:

$$\Delta \theta = 2\beta \frac{b}{L} \frac{\sqrt{\rho^2 - 2\rho \cos 2\theta + 1} (\rho + \varepsilon)^2 (1 - \varepsilon)}{\rho(\rho^2 - 1)(\rho - 1 + 2\varepsilon) \cos \theta_0}.$$

Рассмотрим следующий пример:

$$b = \frac{L}{5}; \quad \theta = 15^\circ, \quad \beta = 15^\circ, \quad \rho = 5, \quad \varepsilon = 0;$$

$$\frac{\Delta \theta}{\beta} = 2,5 \frac{\sqrt{26 - 10 \cos 30^\circ} \cdot 5}{\cos 15^\circ \cdot 24 \cdot 4} = 2,2,$$

$$\Delta \theta = 2,2 \cdot 15^\circ = 33^\circ.$$

Предельный угол атаки щитка под крылом будет равен:

$$\theta + \Delta \theta = 15^\circ + 33^\circ = 48^\circ.$$

Посмотрим, каков предельный угол атаки для щитка над крылом. В этом случае основное крыло будет являться щитком под крылом для надкрылка. Рассуждая, как и в предыдущем случае, и замечая, что $\Delta_2 \theta = 0$, получим для щитка над крылом предельный угол будет равен 15° .

9. Сводка формул

1. Положение смещения критической точки разделения струй:

$$\alpha_2 = \pi + 2\theta + 2\delta; \quad (\text{I})$$

$$\delta = \frac{I}{\Gamma} \frac{d \sin \theta \cos (\theta - \mu)}{(r - \cos \mu) [r + \cos (2\theta - \mu) + K \sin (\theta - \mu)]}; \quad (\text{II})$$

$$K = \frac{I}{\Gamma} \frac{d \sin \theta}{r - \cos \mu}.$$

2. Скорость на поверхности цилиндра:

$$\frac{dw}{dz} = 4V_{\infty} e^{-\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)} \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{\varphi - \alpha}{2} \cdot L. \quad (\text{III})$$

3. Определение величины L ,

$$L = \frac{\frac{1}{2} \left(e^{\nu} + \frac{1}{e^{\nu}} \right) - \cos [\varphi - (\mu - \delta)]}{\frac{1}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) - \cos (\varphi - \mu)}, \quad (\text{IV})$$

$$\nu = \ln (S + \sqrt{S^2 - 1}), \quad (\text{V})$$

$$S = \frac{r \cos (\theta - \mu) - \cos \left(\theta - \frac{\alpha}{2} \right) \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \left(\frac{\alpha}{2} - \mu \right)}. \quad (\text{VI})$$

4. Определение уменьшения скорости на поверхности цилиндра

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \mu - \frac{\delta}{2} + \arcsin \left[r \operatorname{tg} (\mu - \theta) + \frac{\sin \theta}{\cos (\theta - \mu)} \right]; \\ \varphi_2 &= \mu - \frac{\delta}{2} + \pi - \arcsin \left[r \operatorname{tg} (\mu - \theta) + \frac{\sin \theta}{\cos (\theta - \mu)} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VII})$$

5. Циркуляция и силы

$$\Gamma = -4\pi V_{\infty} \sin \theta + I \frac{d}{r - \cos \mu}; \quad (\text{VIII})$$

$$|\Delta \Gamma| = |I| \frac{d}{r - \cos \mu}; \quad (\text{IX})$$

$$\Delta P = \rho V_{\infty} |I| \frac{d}{r - \cos \mu}. \quad (\text{X})$$

6. Силы, действующие на основную часть крыла и на добавочные части:

$$P_1 = 4\pi \rho V_{\infty}^2 \left[\sin \theta + \frac{I}{4\pi V_{\infty}} \left(\frac{d}{r - \cos \mu} - \frac{V_0}{V_{\infty}} \cos \gamma_0 \right) \right]; \quad (\text{XI})$$

$$P_2 = \rho V_0 |I| \cos \gamma_0; \quad (\text{XII})$$

$$P_3 = \rho V_0 |I|; \quad (\text{XIII})$$

$$\left. \begin{aligned} V_0 \cos \gamma_0 &= V_\infty \left[\cos \theta - \frac{1}{\rho^2} \cos (\theta - 2\mu) \right] - \left(\frac{\Gamma}{2\pi\rho} - \frac{I}{4\pi d} \right) \sin \mu; \\ V_0 \sin \gamma_0 &= V_\infty \left[\sin \theta + \frac{1}{\rho^2} \sin (\theta - 2\mu) \right] + \left(\frac{\Gamma}{2\pi\rho} - \frac{I}{4\pi d} \right) \sin \mu. \end{aligned} \right\} \quad (\text{XIV})$$

7. Определение величины I (приближенно)

$$I = -\pi b \beta V_\infty \sqrt{1 + \frac{2 \cos 2(\mu + 2\theta)}{\rho}} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\rho^2 - 2\rho \varepsilon \cos \mu + \varepsilon^2}{\rho \sqrt{\rho^2 + 2(1 - 2\varepsilon)\rho \cos \mu + (1 - 2\varepsilon)^2}}. \quad (\text{XV})$$

8. Надкрылок. Циркуляция вокруг надкрылка (приближенно)

$$I = -\pi b \beta V_\infty \sqrt{\rho^2 + 2 \sin 2\theta \cdot \rho + 1} \frac{\rho^2 + \varepsilon^2}{\rho^2 \sqrt{\rho^2 + (1 - 2\varepsilon)^2}}.$$

Смещение критической точки:

$$\delta = \frac{I \sin^2 \theta d}{\Gamma r (r + \sin 2\theta)}.$$

Увеличение предельного угла атаки $\Delta \theta = 0$.

Предельное увеличение подъемной силы:

$$\Delta_1 P = \sigma V_\infty^2 \pi b \sqrt{\rho^2 + 2 \sin 2\theta \cdot \rho + 1} \frac{\rho^2 + \varepsilon^2}{\rho^2 \sqrt{\rho^2 + (1 - 2\varepsilon)^2}}.$$

9. Подкрылок.

Циркуляция вокруг подкрылка (приближенно)

$$I = -\pi b \beta V_\infty \sqrt{\rho^2 - 2 \sin 2\theta \cdot \rho + 1} \frac{\rho^2 + \varepsilon^2}{\rho^2 \sqrt{\rho^2 + (1 - 2\varepsilon)^2}}.$$

Смещение критической точки:

$$\delta = -\frac{I \sin^2 \theta d}{\Gamma r (r - \sin 2\theta)}.$$

Увеличение предельного угла атаки $\Delta \theta = 0$.

Предельное увеличение подъемной силы

$$\Delta_2 P = \sigma V_\infty^2 \pi b \sqrt{\rho^2 - 2 \sin 2\theta \cdot \rho + 1} \frac{\rho^2 + \varepsilon^2}{\rho^2 \sqrt{\rho^2 + (1 - 2\varepsilon)^2}}.$$

10. Примеры

Разберем два примера.

I. Надкрылок. Берем следующие данные:

$$\begin{aligned} L = 4(1 - \varepsilon); \quad \frac{b}{L} = 0,3; \quad \beta = 15^\circ (0,262); \quad \varepsilon = 0,2; \\ \rho = 2; \quad \theta_0 = 15^\circ. \end{aligned}$$

По формуле (76') имеем:

$$\frac{\Delta_1 P}{P} = \frac{b \beta}{4 \sin \theta_0} \sqrt{\rho^2 + 2 \sin 2\theta_0 \cdot \rho + 1} \cdot \frac{\rho^2 + \varepsilon^2}{\rho^2 \sqrt{\rho^2 + (1 - 2\varepsilon)^2}} \frac{\rho^2 - 1}{\rho^2 + 1};$$

$$\frac{\Delta_1 P}{P} = \frac{0,3 \cdot 4(1 - 0,2) \cdot 0,262}{4 \cdot 0,259} \cdot \frac{\sqrt{4 + 2 + 1}}{4 \sqrt{4 + 0,36}} (4 + 0,04) \cdot 0,6;$$

$$\frac{\Delta_1 P}{P} = \frac{0,06 \cdot 0,262 \cdot 0,6 \cdot 4,04}{0,259} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{4,36}} = 0,189,$$

т. е. увеличение подъемной силы составляет 19%.

II. Подкрылок. Берем следующие данные:

$$L = 4(1 - \varepsilon); \quad \frac{b}{L} = 0,3; \quad \beta = 50^\circ (0,872); \quad \varepsilon = 0,2;$$

$$\rho = 2; \quad \theta_0 = 15^\circ.$$

По формуле (86) имеем:

$$\frac{\Delta_2 P}{P} = \frac{b \beta}{4 \sin \theta_0} \sqrt{\rho^2 - 2 \sin 2\theta_0 \cdot \rho + 1} \cdot \frac{\rho^2 + \varepsilon^2}{\rho^2 \sqrt{\rho^2 + (1 - 2\varepsilon)^2}} \frac{\rho^2 - 1}{\rho^2 + 1};$$

$$\frac{\Delta_2 P}{P} = \frac{4(1 - 0,2) 0,3}{4 \cdot 0,259} \cdot 0,872 \cdot \frac{\sqrt{4 - 2 + 1}}{4 \sqrt{4 + 0,36}} \cdot 0,6 (4 + 0,04);$$

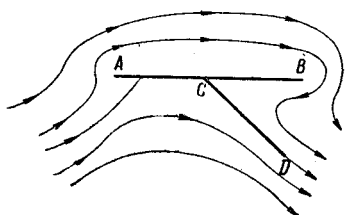
$$\frac{\Delta_2 P}{P} = \frac{0,06 \cdot 0,872 \cdot 0,6 \cdot 4,04}{0,259} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4,36}} = 0,405,$$

т. е. увеличение подъемной силы составляет 40—41%.

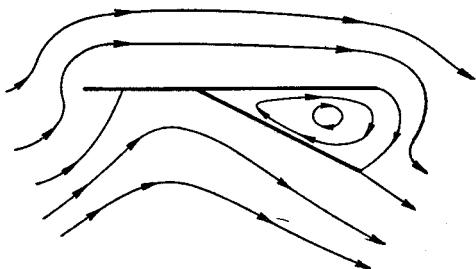
К ТЕОРИИ ЩИТКОВ, ПЛОТНО ПРИЛЕГАЮЩИХ К КРЫЛУ

1. Общие замечания

Задачей настоящей работы является изучение влияния щитков, плотно прилегающих к основной части крыла. Эта задача была разобрана в работе С. М. Тарг¹, причем предполагалось, что имеется плавное обтекание основной части крыла и щитка и точкой схода струй является кромка щитка и основная часть крыла и щиток рассматриваются в виде плоских пластинок. Таким образом, течение имеет вид, указанный на фиг. 1, где AB основная часть крыла и DC щиток. Результаты исследований С. М. Тарг дали вполне удовлетворительное качественное согласие с результатами эксперимента. Тем не менее является желательным заменить гидродинамическую схему, которая лежит в основе исследования С. М. Тарг, другую схемой, более близкою к экспериментальным данным.



Фиг. 1



Фиг. 2

Опыты, проводившиеся с обтеканием подобных профилей в водяном канале, показали, что внутри угла BCD , образованного задней частью крыла и щитком, образуются интенсивные вихреобразования. В настоящей работе и рассматривается обтекание крыла со щитком в условиях, когда внутри угла BCD образуется стационарный вихрь, так что течение имеет вид, указанный на фиг. 2, и изучается влияние этих вихрей на условия обтекания.

В настоящей работе дан новый вывод формул, позволяющих решить задачу об обтекании контуров, разобранных в работах С. А. Чаплыгина и Н. С. Аржаникова и в работе С. М. Тарг и даны некоторые результаты, выясняющие влияние вихрей, образующихся в пазухах, между крылом и закрылком на условия обтекания.

Настоящая работа так же, как и исследование С. М. Тарг, ведется в условиях плоско-параллельного потока; основой дальнейшего исследования является метод, представляющий некоторое видоизменение метода С. М. Тарг и результаты, полученные ранее об обтекании цилиндра в присутствии вихрей².

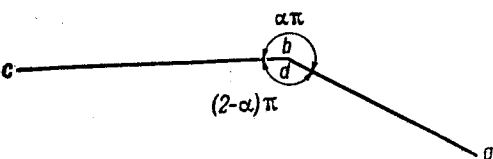
¹ С. М. Тарг. К теории крыла со щитовидным закрылком. Труды III Всесоюз. конф. по аэродинамике. Ч. II. 1935.

² В. В. Голубев. Обтекание круглого цилиндра в присутствии системы вихрей. Уч. Зап. Моск. у-та, т. 7, 1937.

2. Отображение углового профиля

В работе С. А. Чаплыгина и Н. С. Аржаникова¹ разобрано обтекание контура вида, указанного на фиг. 3. Мы дадим здесь новый вывод формул, позволяющих найти подъемную силу и условия обтекания.

Применяя обычный метод, найдем прежде всего отображение внешней части плоскости крыла на внешнюю часть окружности радиуса 1. Предполагая, что профиль крыла находится на плоскости ζ и сечение вспомогательной окружности находится на плоскости z можем написать отображающую функцию в виде:



Фиг. 3

$$\begin{aligned}\zeta &= C_1 \int \frac{(z-1)(z-b_1)^{\alpha-1}(z-c_1)(z-d_1)^{1-\alpha}}{z^2} dz = \\ &= C_1 \int \left(\frac{z-b_1}{z-d_1} \right)^{\alpha-1} \frac{(z-1)(z-c_1)}{z^2} dz,\end{aligned}\quad (1)$$

где точки b_1, c_1, d_1 лежат на окружности $|z|=1$.

Интеграл ищем в форме:

$$f(z) = \frac{(z-b_1)^\alpha (z-d_1)^{2-\alpha}}{z}.\quad (2)$$

Отсюда:

$$f'(z) = \frac{(z-b_1)^\alpha (z-d_1)^{2-\alpha}}{z} \left[\frac{\alpha}{z-b_1} + \frac{2-\alpha}{z-d_1} - \frac{1}{z} \right]$$

или после упрощений:

$$f'(z) = \frac{(z-b_1)^{\alpha-1} (z-d_1)^{1-\alpha}}{z^2} [z^2 - (ad_1 + (2-\alpha)b_1 - b_1 - d_1)z - b_1d_1].$$

Так как один из корней трехчлена

$$z^2 - (ad_1 + (2-\alpha)b_1 - b_1 - d_1)z - b_1d_1 = z^2 + Az + B$$

есть 1, то

$$1 - [ad_1 + (2-\alpha)b_1 - b_1 - d_1] - b_1d_1 = 0$$

или

$$1 + A + B = 0.\quad (3)$$

Для нахождения второго корня C_1 имеем уравнение

$$z^2 + Az + B = 0.\quad (4)$$

Из уравнений (4) и (3) получим:

$$(z-1)(z+1+A)=0,$$

следовательно, второй корень равен

$$c_1 = z = -(1+A)$$

или, пользуясь равенством (3),

$$c_1 = B = -b_1d_1.\quad (5)$$

¹ С. А. Чаплыгин, Н. С. Аржаников. К теории открытия и закрытия. Собр. соч. С. А. Чаплыгина, т. II, 277, 1933.

Итак, интеграл (2) может быть написан в виде:

$$f(z) = \frac{(z-b_1)^\alpha (z-d_1)^{2-\alpha}}{z}$$

и

$$c_1 = -b_1 d_1.$$

Отсюда легко найдем длины $ab=ad=l_1$ и $bc=dc=l_2$.

Пусть $b_1 = e^{\beta i}$; $d_1 = e^{\delta i}$, тогда $c_1 = e^{(\pi+\beta+\delta)i}$.

Точкам b_1 и d_1 на плоскости z соответствует точка 0.

Поэтому для нахождения l_1 и l_2 надо найти:

$$|f(1)| \text{ и } |f(c_1)|.$$

Но, полагая $z = e^{\varphi i}$, получим из формул:

$$z - b_1 = e^{\varphi i} - e^{\beta i} = e^{\frac{\varphi + \beta}{2} i} 2i \sin \frac{\varphi - \beta}{2};$$

$$z - d_1 = e^{\varphi i} - e^{\delta i} = e^{\frac{\varphi + \delta}{2} i} 2i \sin \frac{\varphi - \delta}{2};$$

$$f(z) = e^{\left[\frac{\varphi}{2} \alpha + \frac{\varphi}{2} (2-\alpha) - \varphi \right] i} \times \\ \times e^{\left[\frac{\beta \alpha}{2} + \frac{\delta (2-\alpha)}{2} \right] i} 2^2 i^2 \sin^\alpha \left(\frac{\varphi - \beta}{2} \right) \sin^{2-\alpha} \left(\frac{\varphi - \delta}{2} \right), \quad (6)$$

откуда

$$|f(1)| = 4 \sin^\alpha \left| \frac{\beta}{2} \right| \sin^{2-\alpha} \frac{\delta}{2};$$

$$|f(c_1)| = 4 \sin^\alpha \left| \frac{\pi + \delta}{2} \right| \sin^{2-\alpha} \left| \frac{\pi + \beta}{2} \right| = 4 \cos^\alpha \frac{\delta}{2} \cos^{2-\alpha} \frac{\beta}{2}.$$

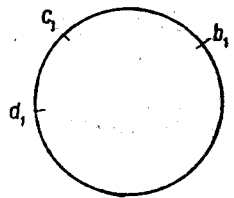
Далее, из геометрических соображений ясно, что точка c_1 на окружности должна лежать между b_1 и d_1 , как указано на фиг. 4.

Следовательно, полагая, что $\pi + \beta + \delta > 2\pi$, имеем:

$$\beta < \pi + \beta + \delta - 2\pi < \delta.$$

Заметим, что из уравнения (3) имеем:

$$d_1 = \frac{1 + (\alpha - 1) b_1}{(\alpha - 1) + b_1},$$



Фиг. 4

откуда при $b_1 = 1$ имеем также и $d_1 = 1$ и при $b_1 = -1$ имеем $d_1 = 1$.

Далее из уравнения (2) имеем при $b_1 = d_1 = 1$.

$$f(z) = \frac{(z-1)^2}{z} = z + \frac{1}{z} - 2$$

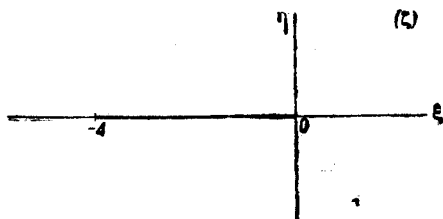
и, полагая $C_1 = 1$, получим отображающую функцию в виде:

$$\zeta = z + \frac{1}{z} - 2,$$

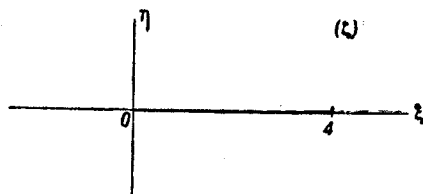
т. е. имеем плоскую пластинку, помещенную, как указано на фиг. 5. Точно так же при $b_1 = d_1 = -1$ получим:

$$\zeta = z + \frac{1}{z} + 2,$$

т. е. снова получим плоскую пластинку, но расположенную, как указано на фиг. 6.



Фиг. 5



Фиг. 6

Так как при отображении, даваемом функцией (2), точка $\zeta = 0$ помещается в вершине угла (точка b или d фиг. 3), то отсюда следует, что при b_1 (а, следовательно, и d_1) близком к $+1$ точки b и d расположены

близко к a , т. е. $\frac{l_1}{l_2}$ мало; в случае же, если b_1 (а, следовательно, и d_1)

близко к -1 , точки b и d близки к c , т. е. $\frac{l_1}{l_2}$ велико. Отсюда следует,

что, изменяя β от 0 до ∞ или, что то же, изменяя b_1 от 1 до -1 мы можем дать отношению длин сторон отображаемого угла $\frac{l_1}{l_2}$ любое значение.

Мы не будем в настоящей работе исследовать до конца случай обтекания угла и перейдем к случаю обтекания крыла с закрылком, в котором мы применим тот же метод, какой мы применили в настоящем параграфе.

3. Отображение профиля со щитком

Рассмотрим полное, без отрывов, обтекание контура $abcdla$ (фиг. 7), причем точка a является точкой схода струй. Отобразим внешнюю часть контура $abcdla$ на внешнюю часть единичного круга вспомогательной плоскости (ζ). Применяя формулу Шварц-Кристоффеля и замечая, что точкам a, c, d соответствуют углы 2π и принимая угол при точке b равным $\alpha\pi$ и, следовательно, угол при точке e равным $(1-\alpha)\pi$, получим формулу Шварц-Кристоффеля в виде:

$$\zeta = C_1 \int \frac{(z-1)(z-b_1)^{\alpha-1}(z-c_1)(z-d_1)(z-l_1)^{-\alpha}}{z^2} dz, \quad (1)$$

где точки $1, b_1, c_1, \dots, l_1$ суть точки единичной окружности, соответствующие точкам a, b, \dots, l контура на плоскости (ζ).

Мы будем искать выражение интеграла в виде:

$$f(z) = \frac{(z-b_1)^\alpha (z-l_1)^{1-\alpha} (z-n)}{z}. \quad (2)$$

Беря от выражения (2) логарифмическую производную, получим:

$$f'(z) = \frac{(z-b_1)^\alpha (z-l_1)^{1-\alpha} (z-n)}{z} \left[\frac{\alpha}{z-b_1} + \frac{1-\alpha}{z-l_1} + \frac{1}{z-n} - \frac{1}{z} \right]$$

или, после некоторых преобразований:

$$f'(z) = \frac{(z-b_1)^{\alpha-1} (z-l_1)^{-\alpha}}{z^2} \cdot \varphi(z),$$

где

$$\varphi(z) = z^3 - [\alpha(l_1+n) + (1-\alpha)(b_1+n) - n] z^2 + [\alpha l_1 n + (1-\alpha) b_1 n] z + b_1 l_1 n. \quad (3)$$

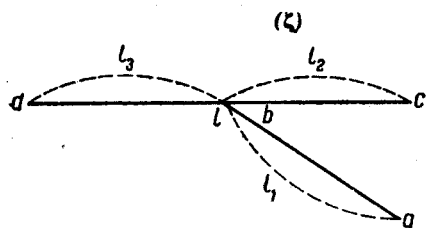
Для того, чтобы $f(z)$ представляло интеграл выражения (1), нужно, чтобы многочлен:

$$\begin{aligned} & z^3 - [\alpha(l_1+n) + (1-\alpha)(b_1+n) - n] z^2 + \\ & + [\alpha l_1 n + (1-\alpha) b_1 n - l_1 n - b_1 n] z + b_1 l_1 n \end{aligned} \quad (4)$$

имел корни 1, c_1 , d_1 .

Так как многочлен (4) имеет корень 1, то

$$1 - \{ \alpha(l_1+n) + (1-\alpha)(b_1+n) - n \} + \{ \alpha n(l_1-b_1) - l_1 n \} + b_1 l_1 n = 0. \quad (5)$$



Фиг. 7

Если уравнение для нахождения корней

$$\begin{aligned} & z^3 - \{ \alpha(l_1+n) + (1-\alpha)(b_1+n) - n \} z^2 + \\ & + \{ \alpha l_1 n + (1-\alpha) b_1 n - l_1 n - b_1 n \} z + \\ & + b_1 l_1 n = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

написать короче в виде:

$$z^3 + Az^2 + Bz + C = 0, \quad (6')$$

то условие (5) примет вид:

$$1 + A + B + C = 0. \quad (7)$$

Из (6') и (7) имеем:

$$(z-1) \{ z^2 + (1+A)z + 1+A+B \} = 0$$

и, применяя условие (7), получим для нахождения корней c_1 и d_1 уравнение:

$$z^2 - [\alpha(l_1-b_1) + b_1 - 1] z - b_1 l_1 n = 0. \quad (8)$$

Точки c_1 , d_1 лежат на окружности; покажем, что корни уравнения (8) удовлетворяют этому условию.

Найдем прежде всего величину n из уравнения (5):

$$n = \frac{\alpha(l_1-b_1) + b_1 - 1}{\alpha(l_1-b_1) + l_1(b_1-1)}. \quad (9)$$

Так как b_1 и c_1 лежат на окружности $|z|=1$, то положим:

$$b_1 = e^{\beta i}; l_1 = e^{\varepsilon i}. \quad (10)$$

Подставляя в (9), получим:

$$n = \frac{\alpha(e^{\varepsilon i} - e^{\beta i}) + e^{\beta i} - 1}{\alpha(e^{\varepsilon i} - e^{\beta i}) + e^{\varepsilon i}(e^{\beta i} - 1)} = \frac{\alpha e^{\frac{\varepsilon+\beta}{2}i} 2i \sin \frac{\varepsilon-\beta}{2} + e^{\frac{\beta}{2}i} 2i \sin \frac{\beta}{2}}{\alpha e^{\frac{\varepsilon+\beta}{2}i} 2i \sin \frac{\varepsilon-\beta}{2} + e^{\varepsilon i + \frac{\beta}{2}i} 2i \sin \frac{\beta}{2}}$$

или

$$n = e^{-\varepsilon i} \frac{\alpha e^{\frac{\varepsilon}{2}i} \sin \frac{\varepsilon-\beta}{2} + \sin \frac{\beta}{2}}{\alpha e^{-\frac{\varepsilon}{2}i} \sin \frac{\varepsilon-\beta}{2} + \sin \frac{\beta}{2}}. \quad (11)$$

Так как числитель и знаменатель дроби, входящей в выражение (11), числа комплексные сопряженные, то отсюда следует, что $|n|=1$.

Подставляя найденное выражение n в уравнение (8), получим:

$$z^2 - 2ie^{\frac{\beta}{2}i} \left[\alpha e^{\frac{\varepsilon}{2}i} \sin \frac{\varepsilon-\beta}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \right] z - e^{\beta i} \frac{\alpha e^{\frac{\varepsilon}{2}i} \sin \frac{\varepsilon-\beta}{2} + \sin \frac{\beta}{2}}{\alpha e^{-\frac{\varepsilon}{2}i} \sin \frac{\varepsilon-\beta}{2} + \sin \frac{\beta}{2}} = 0. \quad (12)$$

Для того, чтобы по возможности упростить решение этого уравнения, введем новое неизвестное t , положив:

$$z = e^{\frac{\beta}{2}i} t, \quad (13)$$

тогда получим для t уравнение:

$$t^2 \left\{ \alpha e^{-\frac{\varepsilon}{2}i} \sin \frac{\varepsilon-\beta}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \right\} - 2i \left\{ \alpha^2 \sin^2 \frac{\varepsilon-\beta}{2} + 2\alpha \sin \frac{\varepsilon-\beta}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\varepsilon}{2} + \right. \\ \left. + \sin^2 \frac{\beta}{2} \right\} t - \left\{ \alpha e^{\frac{\varepsilon}{2}i} \sin \frac{\varepsilon-\beta}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \right\} = 0.$$

Пусть

$$\alpha^2 \sin^2 \frac{\varepsilon-\beta}{2} + 2\alpha \sin \frac{\varepsilon-\beta}{2} \cos \frac{\varepsilon}{2} \sin \frac{\beta}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} = \Delta.$$

Тогда:

$$t = \frac{i\Delta \pm \sqrt{\Delta(1-\Delta)}}{\alpha e^{-\frac{\varepsilon}{2}i} \sin \frac{\varepsilon-\beta}{2} + \sin \frac{\beta}{2}}.$$

Отсюда, замечая, что

$$\Delta = \left\{ \alpha e^{\frac{\varepsilon}{2}i} \sin \frac{\varepsilon - \beta}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \right\} \cdot \left\{ \alpha e^{-\frac{\varepsilon}{2}i} \sin \frac{\varepsilon - \beta}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \right\} = \\ = (p + qi)(p - qi),$$

и умножая числителя и знаменателя в формуле (14) на $p - qi$, получим:

$$t = \frac{\Delta i + \sqrt{\Delta(1 - \Delta)}}{\Delta} (p + qi). \quad (15)$$

Мы будем далее считать, что

$$\Delta < 1. \quad (16)$$

Тогда из (15) имеем:

$$|t|^2 = \frac{\Delta(1 - \Delta) + \Delta^2}{\Delta^2} \cdot \Delta = 1,$$

а потому корни уравнения (15) t_1 и t_2 и соответствующие корни уравнения (2) z_1 и z_2 лежат на окружности $|z| = 1$.

Так как

$$-n b_1 l_1 = t_1 t_2 b_1,$$

то

$$n = -t_1 t_2 l_1^{-1}$$

и, следовательно, полагая $n = e^{\beta i}$; $t_1 = e^{\varepsilon i}$; $t_2 = e^{\delta i}$, получим:

$$\nu = \pi + \gamma + \delta - \varepsilon. \quad (16)$$

Таким образом по данным α , β , ε легко найдем t_1 , t_2 и n и выражение (2).

Так как по (1)

$$\zeta = C_1 f(z),$$

то, замечая, что при $z = b_1$, $z = e_1$, $z = n$, $\zeta = 0$, получим, что на плоскости ζ точка b (или e) переходит в начало координат, а потому:

$$L_1 = |C_1 f(1)|; \\ L_2 = |C_1 f(z_1)|; \\ L_3 = |C_1 f(z_2)| \quad (17)$$

и, следовательно:

$$\mu_1 = \frac{L_2}{L_1} = \left| \frac{f(z_1)}{f(1)} \right|; \quad \mu_2 = \frac{L_3}{L_1} = \left| \frac{f(z_2)}{f(1)} \right|. \quad (18)$$

Так как для решения задачи важно только выполнить уравнения (18), то в конце концов при заданных μ_1 и μ_2 мы имеем два уравнения (18), из которых мы должны найти величины ε и β и по ним далее t_1 , t_2 , n и функцию (2). Для выражений μ можно найти очень симметричный вид. Для этого найдем выражение $f(e^{\varphi i})$

$$f(e^{\varphi i}) = C_1 \frac{(e^{\varphi i} - e^{\beta i})^\alpha (e^{\varphi i} - e^{\varepsilon i})^{1-\alpha} (e^{\varphi i} - e^{\nu i})}{e^{\varphi i}}.$$

Но

$$e^{\varphi i} - e^{\beta i} = e^{\frac{\varphi + \beta}{2}i} 2i \sin \frac{\varphi - \beta}{2} \text{ и т. д.}$$

Отсюда

$$|f(e^{\varphi i})| = |C_1| 2^\alpha \sin^\alpha \left| \frac{\varphi - \beta}{2} \right| 2^{1-\alpha} \sin^{1-\alpha} \left| \frac{\varphi - \varepsilon}{2} \right| 2 \sin \left| \frac{\varphi - \nu}{2} \right|$$

или

$$|f(e^{\varphi i})| = 4 \sin^\alpha \left| \frac{\varphi - \beta}{2} \right| \cdot \sin^{1-\alpha} \left| \frac{\varphi - \varepsilon}{2} \right| \cdot \sin \left| \frac{\varphi - \nu}{2} \right| : |C_1|.$$

Следовательно:

$$\mu_1 = \left(\frac{\sin \left| \frac{\beta}{2} \right|}{\sin \left| \frac{\gamma - \beta}{2} \right|} \right)^\alpha \left(\frac{\sin \left| \frac{\varepsilon}{2} \right|}{\sin \left| \frac{\gamma - \varepsilon}{2} \right|} \right)^{1-\alpha} \left(\frac{\sin \left| \frac{\nu}{2} \right|}{\sin \left| \frac{\gamma - \nu}{2} \right|} \right) \quad (19)$$

и аналогичные выражения для μ_2 , заменив γ через δ .

Пример.

$$\alpha = \frac{1}{3}; \beta = 60^\circ; \varepsilon = 300^\circ.$$

$$1) \quad \frac{\varepsilon - \beta}{2} = 120^\circ; \frac{\varepsilon}{2} = 150^\circ; \frac{\beta}{2} = 30^\circ.$$

$$2) \quad p + qi = \frac{1}{3} (\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ) \sin 120^\circ + \sin 30^\circ$$

$$p + qi = \frac{3 + i\sqrt{3}}{12}.$$

$$3) \quad \Delta = |p + qi|^2 = \frac{1}{12}.$$

$$4) \quad t = (i \pm \sqrt{11}) \frac{3 + i\sqrt{3}}{12}; \quad t_1 = \frac{3\sqrt{11} - \sqrt{3}}{12} + i \frac{3 + \sqrt{33}}{12};$$

$$t_2 = -\frac{3\sqrt{11} + \sqrt{3}}{12} - i \frac{\sqrt{33} - 3}{12}.$$

Откуда:

$$\gamma = \arg t_1 = 46^\circ; \arg z_1 = 76^\circ;$$

$$\delta = \arg t_2 = 193^\circ; \arg z_2 = 223^\circ.$$

$$5) \nu = 180^\circ + 46^\circ + 193^\circ - 300^\circ = 119^\circ.$$

Отсюда:

$$f(z) = f_1(\varphi) = 4 \sin^{\frac{1}{3}} \left| \frac{\varphi - 60^\circ}{2} \right| \sin^{\frac{2}{3}} \left| \frac{\varphi - 300^\circ}{2} \right| \sin \left| \frac{\varphi - 119^\circ}{2} \right|;$$

$$f(1) = f_1(0) = 4 \sin^{\frac{1}{3}} 30^\circ \sin^{\frac{2}{3}} 30^\circ \cdot \sin 59^\circ = 4 \cdot 0,428;$$

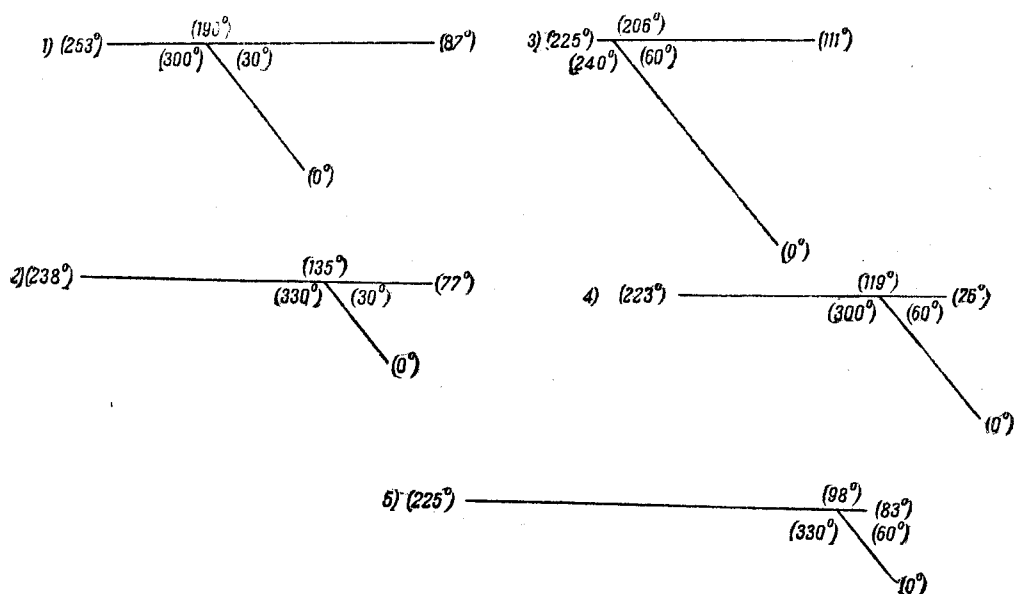
$$f(z_1) = 4 \sin^{\frac{1}{3}} 8^\circ \sin^{\frac{2}{3}} 112^\circ \sin 21^\circ = 4 \cdot 0,177;$$

$$f(z_2) = 4 \sin^{\frac{1}{3}} 81^\circ \cdot \sin^{\frac{2}{3}} 39^\circ \sin 52^\circ = 4 \cdot 0,533.$$

Подобным же образом произведены вычисления при ряде других предположений. Результаты этих вычислений даны в следующей таблице.

№	β	ε	γ	δ	ν	$\arg z_1$	$\arg z_2$	$\frac{1}{4} f(1)$	$\frac{1}{4} f(z_1)$	$\frac{1}{4} f(z_2)$
1	30°	300°	72°	238°	190°	87°	253°	0,4014	0,5913	0,2768
2	30°	330°	62°	223°	135°	77°	238°	0,2562	0,3085	0,6263
3	60°	240°	71°	195°	206°	111°	225°	0,703	0,533	0,0465
4	60°	300°	46°	193°	119°	76°	223°	0,428	0,177	0,533
5	60°	330°	53°	195°	98°	83°	225°	0,2433	0,075	0,980

Относительные размеры отдельных частей указаны на фиг. 8.



Фиг. 8

4. Об условиях, определяющих положение вихря

Мы переходим теперь к построению формул, дающих добавочное вихревое течение.

В случае обтекания круглого цилиндра в присутствии одного неподвижного вихря для определения положения критических точек на поверхности цилиндра имеет место следующее уравнение:

$$z^4 + \left[\frac{\Gamma e^{\theta i}}{2\pi i V_{\infty}} - (a + \bar{a}) \right] z^3 + \left[a\bar{a} - e^{2\theta i} + \frac{\Gamma e^{\theta i}}{2\pi i V_{\infty}} (a + \bar{a}) + \frac{\Gamma e^{\theta i}}{2\pi i V_{\infty}} (a - \bar{a}) \right] z^2 + \left[e^{2\theta i} (a + \bar{a}) + \frac{\Gamma e^{\theta i}}{2\pi i V_{\infty}} a\bar{a} \right] z - e^{2\theta i} a\bar{a} = 0^1.$$

Называя корни этого уравнения через z_1, z_2, z_3, z_4 , имеем для них следующие уравнения:

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = a + \bar{a} - \frac{\Gamma e^{\theta i}}{2\pi i V_{\infty}}; \quad (a)$$

¹ В. В. Голубев. О влиянии системы неподвижных вихрей на обтекание цилиндра. Уч. зап. МГУ, т. 7, стр. 12. 1937.

$$\sum z_k z_l = \bar{a}a - e^{2\theta i} + \frac{\Gamma e^{\theta i}}{2\pi i V_\infty} (a + \bar{a}) + \frac{I e^{\theta i}}{2\pi i V_\infty} (a - \bar{a}) \quad (b)$$

и, называя

$$z_k = e^{\alpha_k i},$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 2\theta + \pi + 2\mu. \quad (d)$$

Разбивая на действительную и мнимую часть и считая, что все z_k лежат на окружности $|z|=1$, имеем из (a):

$$\sum \cos(\alpha_k - \theta) = \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) \cos(\mu - \theta); \quad (a')$$

$$\sum \sin(\alpha_k - \theta) = \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) \sin(\mu - \theta) + \frac{\Gamma}{2\pi V_\infty}; \quad (a'')$$

$$\sum \cos(\alpha_k + \alpha_l - \mu - \theta) = 0; \quad (b')$$

$$\sum \sin(\alpha_k + \alpha_l - \mu - \theta) = 2 \sin(\mu - \theta) + \frac{\Gamma}{2\pi V_\infty} \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) + \frac{I}{2\pi V_\infty} \left(\rho - \frac{1}{\rho}\right). \quad (b'')$$

Но уравнение (b') есть следствие уравнения (d). Действительно:

$$\begin{aligned} \sum \cos(\alpha_k + \alpha_l - \mu - \theta) &= \cos(\alpha_1 + \alpha_2 - \mu - \theta) + \cos(\alpha_1 + \alpha_3 - \mu - \theta) + \\ &+ \cos(\alpha_1 + \alpha_4 - \mu - \theta) + \cos(\alpha_2 + \alpha_3 - \mu - \theta) + \cos(\alpha_2 + \alpha_4 - \mu - \theta) + \\ &+ \cos(\alpha_3 + \alpha_4 - \mu - \theta). \end{aligned} \quad (1)$$

Но по уравнению (d)

$$\begin{aligned} \cos(\alpha_3 + \alpha_4 - \mu - \theta) &= \cos(2\theta + 2\mu + \pi - \mu - \theta) = \cos(\pi + \theta + \mu - \alpha_1 - \alpha_2) = \\ &= -\cos(\alpha_1 + \alpha_2 - \pi - \theta), \end{aligned}$$

а потому в сумме первый и последний член взаимно сокращаются; точно так же взаимно сокращаются члены 2-й и 5-й, 3-й и 4-й.

Таким образом остаются следующие независимые друг от друга уравнения:

$$\sum \cos(\alpha_k - \theta) = \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) \cos(\mu - \theta) \quad (a')$$

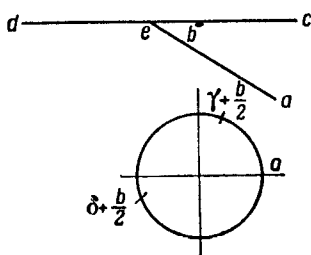
$$\sum \sin(\alpha_k - \theta) = \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) \sin(\mu - \theta) + \frac{\Gamma}{2\pi V_\infty} \quad (a'')$$

$$\sum \sin(\alpha_k + \alpha_l - \mu - \theta) = 2 \sin(\mu - \theta) + \frac{\Gamma}{2\pi V_\infty} \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) + \frac{I}{2\pi V_\infty} \left(\rho - \frac{1}{\rho}\right) \quad (b'')$$

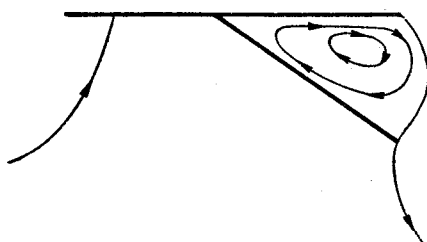
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 2\theta + \pi + 2\mu. \quad (d)$$

Из этих четырех уравнений уравнения (a'') и (b'') могут служить для определения величины Γ и I . Следовательно, для определения величин μ и ρ могут служить уравнения (a') и (d); но в этих уравнениях еще неизвестно α_4 — критическая точка набегания струй.

Действительно, в силу результатов § 1 имеем, что точкам a, c, d профиля соответствуют углы $0, \gamma + \frac{\beta}{2}, \delta + \frac{\beta}{2}$ (фиг. 9), а потому, если, например, потребовать, чтобы вихрь имел расположение, указанное на



Фиг. 9

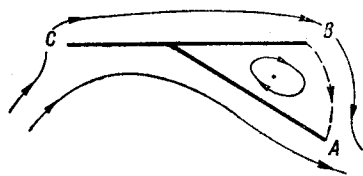


Фиг. 10

фиг. 10, то трем критическим точкам будут соответствовать углы $0, 0, \gamma + \frac{\beta}{2}$ и четвертая точка имеет неопределенное положение.

5. Физические выводы. Примеры

Предшествующие выводы относятся к случаю, когда около крыла имеются связанные с ним вихри; известно, что такие вихри, расположенные вблизи крыла, вызывают смещение критических точек. В частности, благодаря присутствию таких вихрей, может случиться, что одною из критических точек крыла окажется острый выходящий угол, что уничтожит бесконечную невозможную физически скорость обтекания в соответствующей вершине. Изучением таких случаев мы и займемся в настоящем параграфе.



Фиг. 11

Можно показать, что вихрь, направленный в ту же сторону, куда направлена циркуляция около основного крыла, смещает критическую точку против направления циркуляции, если он помещен около задней кромки и смещает критическую точку по направлению циркуляции, если он расположен

около передней кромки; изменение направления вращения вихря, естественно, вызывает изменение направления смещения критических точек¹.

Приложим эти соображения к случаю обтекания контура со щитком вида, рассматриваемого в настоящем параграфе. В случае обтекания контуров вида, указанного на фиг. 11, в пазухе, заключенной между крылом и щитком, как показывает эксперимент, образуется вихрь. С другой стороны, около передней кромки образуются физически невозможные бесконечные скорости около передней кромки, если она не является критической точкой течения. Естественно, возникает вопрос, не могут ли вихри, образующиеся за задней кромкой, сместить критическую точку к передней острой кромке. Предыдущие соображения позволяют очень просто ответить на этот вопрос. Рассмотрим случай течения типа, разобранного в работе С. М. Тарг, но с вихрем, образовавшимся около задней кромки; в этом случае течение имеет вид, указанный на фиг. 11, причем получается добавочный вихрь около задней кромки, направленный в ту же сторону, куда направлен циркуляционный поток около крыла. Из предшествующих рассуждений следует, что в

¹ В. В. Голубев. Исследования по теории разрезного крыла. Ч. II, стр. 20. Труды ЦАГИ, вып. 306, 1937.

точку C критическая точка может быть смещена таким добавочным вихрем только в том случае, если без вихря критическая точка (точка, в которой разделяются струи) помещается на верхней стороне линии BC ; если же критическая точка находится на нижней стороне линии BC , то вихрь может только отодвинуть ее от точки C вправо. Следующие примеры, в котором проделан весь расчет, подтверждают эти выводы.

Рассмотрим крыло, профиль которого дан в табл. 5 (стр. 44).

Пример 1. Пусть $\alpha = \frac{1}{3}$; $\beta = 60^\circ$; $\varepsilon = 330^\circ$.

Тогда $\arg z_1 = 83^\circ$; $\arg z_2 = 225^\circ$; $\nu = 98^\circ$.

Полагая $\zeta = \frac{(z-b)^\alpha (z-e)^{1-\alpha} (z-n)}{z}$,

получим при малом φ ($z = e^{i\varphi}$)

$$\zeta = 4 \cdot e^{\left(\pi + \frac{\beta\alpha}{2} + \frac{\varepsilon(1-\alpha)}{2}\right)i} \sin^\alpha \frac{\varphi - \beta}{2} \sin^{1-\alpha} \frac{\varphi - \varepsilon}{2} \sin \frac{\varphi - \nu}{2},$$

т. е.

$$\zeta = e^{\left(\pi + \frac{\beta\alpha}{2} + \frac{\varepsilon(1-\alpha)}{2} + \frac{\nu}{2}\right)i} R,$$

где R —действительное положительное число. Следовательно, на плоскости ζ отрезок ab образует с действительной положительной осью угол

$$\pi + \frac{\beta\alpha}{2} + \frac{\varepsilon(1-\alpha)}{2} + \frac{\nu}{2}.$$

В настоящем случае имеем угол

$$\pi + \frac{\beta\alpha}{2} + \frac{\varepsilon(1-\alpha)}{2} + \frac{\nu}{2} \text{ или } 180^\circ + \frac{60^\circ \cdot 1}{2 \cdot 3} + \frac{330^\circ \cdot 2}{2 \cdot 3} + 49^\circ = 349^\circ.$$

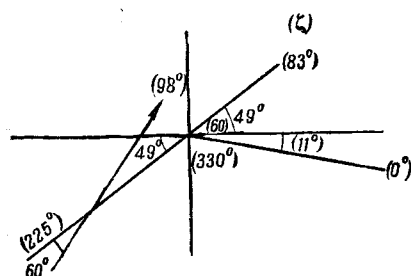
Следовательно, имеем расположение, указанное на фиг. 12.

Найдем в качестве примера такое течение, когда критическими точками будут:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0; \quad \alpha_3 = 83^\circ; \quad \alpha_4 = 330^\circ \text{ и } \theta = 55^\circ.$$

В этом случае по (d)

$$413 = 180^\circ + 110^\circ + 2\mu; \quad \mu = 62^\circ \text{ и по (a')} \quad \rho = 1,42.$$



Фиг. 12



Фиг. 13

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) &= \frac{2 \cos 55^\circ + \cos 28^\circ + \cos 85^\circ}{2 \cos 7^\circ} = \\ &= \frac{1,1472 + 0,8829 + 0,0872}{2 \cdot 0,9925} = \frac{2,1173}{1,9850} = 1,066; \end{aligned}$$

откуда $\rho = 1,42$. Ось вихря определяется данными на плоскости $|z|$ $\rho = 1,42$; $\mu = 62^\circ$. Течение имеет вид, указанный на фиг. 13.

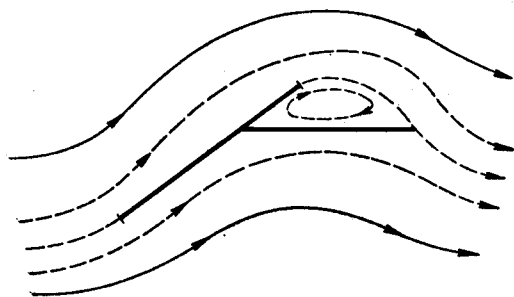
Пример 2. Рассмотрим то же крыло, но возьмем угол $\theta = 0$. Тогда из уравнения (d) $\mu = 64^\circ$ и по уравнению (a') имеем:

$$\rho + \frac{1}{\rho} = \frac{2 + \cos 83^\circ - \cos 45^\circ}{\cos 64^\circ} = 3,22,$$

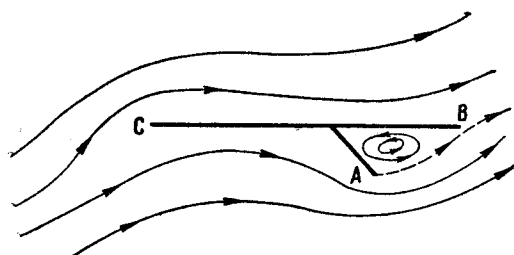
откуда $\rho = 2,87$.

Данными μ и ρ вполне определяется положение добавочного вихря. В этом случае имеем течение, указанное на фиг. 14.

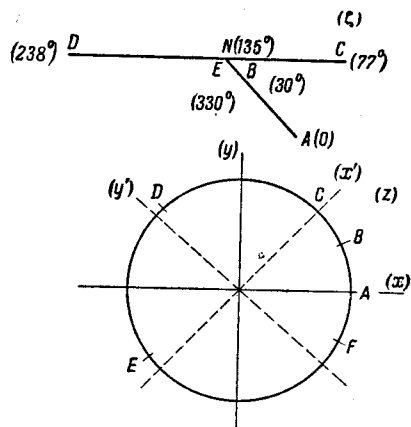
Рассмотрим теперь случай, когда направление вращения добавочного вихря обратное по отношению к направлению циркуляции вокруг крыла. В этом случае общий характер течения указан на фиг. 15.



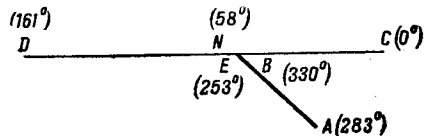
Фиг. 14



Фиг. 15



Фиг. 16



Фиг. 17

Так как добавочный вихрь направлен против направления циркуляции вокруг крыла и находится около задней кромки, то из предыдущего следует, что смещение критической точки будет в ту же сторону, куда направлена циркуляция вокруг крыла, а потому, если критическая точка потока при отсутствии вихря помещается на нижней стороне пластинки BC , то от действия добавочного вихря она может сместиться к передней кромке. Рассмотрим следующий частный случай: пусть имеем профиль № 2 (стр. 44). На фиг. 16 указаны углы, соответствующие на плоскости (z) отдельным точкам профиля. Так как при рассматриваемом обтекании точкою схода струй должна быть точка c , то мы сделаем на плоскости (z) поворот осей так, чтобы точка c лежала на действительной оси. После (такого преобразования точкам профиля соответствуют углы; как показано на фиг. 17.

Отображающая функция имеет вид:

$$\zeta = f(z) = \frac{(z - e^{\beta i})^\alpha (z - e^{\alpha i})^{1-\alpha} (z - e^{\gamma i})}{z}$$

или, после замены $z = e^{i\chi} z'$, где величина χ в градусной мере равна 77° , получим:

$$\zeta = e^{[\alpha\chi + (1-\alpha)\chi + \chi - \chi]i} \frac{(z' - e^{(\beta-\chi)i})^\alpha (z' - e^{(\epsilon-\chi)i})^{1-\alpha} (z' - e^{(\gamma-\chi)i})}{z'}$$

Полагая $z' = e^{i\varphi}$, получим:

$$\zeta = e^{i\chi} \cdot e^{\alpha \left(\frac{\beta-\chi}{2}\right)i + \frac{(1-\alpha)(\epsilon-\chi)}{2}i + \frac{\gamma-\chi}{2}i + \pi i} 4 \left[\sin \frac{\varphi - (\beta-\chi)}{2}\right]^\alpha \left[\sin \frac{\varphi - (\epsilon-\chi)}{2}\right]^{1-\alpha} \sin \frac{\varphi - (\gamma-\chi)}{2}$$

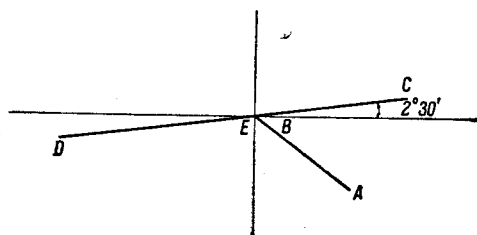
или

$$\zeta = e^{\left[\frac{\alpha\beta}{2} + \frac{(1-\alpha)\epsilon}{2} + \frac{\gamma}{2} + \pi\right]i} 4 \left[\sin \frac{\varphi - (\beta-\chi)}{2}\right]^\alpha \left[\sin \frac{\varphi - (\epsilon-\chi)}{2}\right]^{1-\alpha} \sin \frac{\varphi - (\gamma-\chi)}{2}$$

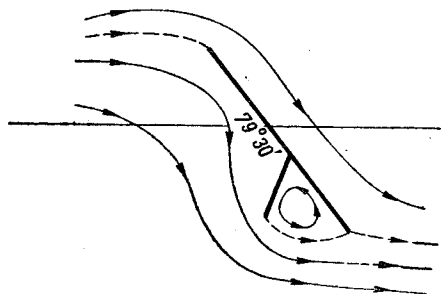
Отсюда следует, что пластинка DC наклонена под углом:

$$\vartheta = \frac{\alpha\beta}{2} + \frac{(1-\alpha)\epsilon}{2} + \frac{\gamma}{2} + \pi$$

к действительной оси на плоскости ζ ; так как в настоящем случае $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = 30^\circ$ и $\epsilon = 330^\circ$, то $\vartheta = 362^\circ 30'$. Следовательно, профиль расположен, как указано на фиг. 18. При больших (z') имеем: $\zeta = e^{i\chi} z' + \dots$, а потому угол, образуемый направлением потока в бесконечности с действительной осью на плоскости ζ , больше, чем на плоскости z' на 77° .



Фиг. 18



Фиг. 19

Рассмотрим поток на плоскости z' под углом $\theta = 5^\circ$; соответствующий поток на плоскости ζ образует угол 82° с действительной осью или $79^\circ 30'$ с плоскостью CD .

Выясним возможно ли обтекание с критическими точками в C , D и с вихрем в углу ABC с критическими точками в A и C .

В рассматриваемом случае имеем:

$$\alpha_1 = 0; \alpha_2 = 161^\circ; \alpha_3 = 283^\circ; \alpha_4 = 360^\circ.$$

Из уравнения (b'') найдем: $\mu = 307^\circ$. Подставляя в уравнение (a'), получим:

$$\rho + \frac{1}{\rho} = \frac{\cos 5^\circ + \cos 156^\circ + \cos 278^\circ + \cos 355^\circ}{\cos 302^\circ} = 2,3.$$

Отсюда $\rho = 1,72$.

Следовательно, положение добавочного вихря определяется данными $\mu = 307^\circ$; $\rho = 1,72$. Итак возможно обтекание профиля со щитком, изображенное на фиг. 19.

Разобранные примеры показывают, что образование вихрей в пазах углов, образуемых щитками, весьма резко изменяет условия обтекания. При этом небольшие щитки, расположенные на нижней поверхности крыла, вызывают образование вихрей, смещающих критическую точку к передней кромке и, благодаря этому улучшающих условия обтекания и работу крыла; наоборот, большие щитки вызывают образование вихрей, удаля-

ющих критическую точку от передней кромки, что должно ухудшить условия обтекания.

6. Влияние вихрей на подъемную силу

Перейдем теперь к учету влияния образующихся между крылом и щитком добавочных, „паразитических“ вихрей на подъемную силу крыла. Так как добавочный, паразитический вихрь не принадлежит к несущей системе крыла, то в рассматриваемом случае нельзя применить теорему Жуковского; мы приложим для определения величины силы теорему Чаплыгина—Блазиуса.

Пусть I интенсивность паразитического вихря, который помещается в точке, переходящей при отображении внешней части крыла на внешнюю часть круглого цилиндра в точку $a = re^{i\mu}$ ($r > 1$). Тогда характеристическая функция соответствующего течения вокруг цилиндра радиуса 1 удовлетворяет уравнению

$$\frac{dw}{dz} = V_{\infty} e^{-\theta i} \left(1 - \frac{e^{2\theta i}}{z^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z} + \frac{I}{2\pi i} \left\{ \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-\bar{a}} \right\}, \quad (1)$$

где

$$\bar{a} = \frac{1}{r} e^{i\mu}.$$

Предполагая, что изображением задней кромки является точка $z=1$, получим соотношение:

$$V_{\infty} e^{-\theta i} \left(1 - e^{2\theta i} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z} + \frac{I}{2\pi i} \left\{ \frac{1}{1-a} - \frac{1}{1-\bar{a}} \right\} = 0, \quad (2)$$

откуда

$$\Gamma = -2\pi i V_{\infty} (e^{-\theta i} - e^{\theta i}) - I \frac{a - \bar{a}}{(1-a)(1-\bar{a})}$$

или иначе

$$\Gamma = -4\pi V_{\infty} \sin \theta - \frac{I \left(r - \frac{1}{r} \right)}{2 \cos \mu - \left(r + \frac{1}{r} \right)}. \quad (3)$$

По формуле Чаплыгина—Блазиуса имеем, называя через X и Y компоненты силы давления потока на крыло

$$Y + iX = -\frac{\rho}{2} \int_{L_1} \left(\frac{dw}{d\zeta} \right)^2 d\zeta,$$

где крыло считается расположенным на комплексной плоскости (ζ). Переходя к переменному (z), получим:

$$Y + iX = -\frac{\rho}{2} \int_L \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 \frac{dz}{\frac{d\zeta}{dz}}, \quad (4)$$

причем контур L оставляет вихрь I вне его. Если $\zeta = \chi(z)$, то окончательно имеем:

$$Y + iX = -\frac{\rho}{2} \int_L \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 \frac{dz}{\chi'(z)}. \quad (4')$$

Так как по формуле (1):

$$\begin{aligned} \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 = & V_\infty^2 e^{-2\theta i} \left(1 - \frac{e^{2\theta i}}{z^2}\right) + \frac{2V_\infty e^{-\theta i} \Gamma}{2\pi i} \left(1 - \frac{e^{2\theta i}}{z^2}\right) \frac{1}{z} + \frac{\Gamma^2}{(2\pi i)^2} \frac{1}{z^2} + \\ & + 2V_\infty e^{-\theta i} \frac{I}{2\pi i} \left(1 - \frac{e^{2\theta i}}{z^2}\right) \left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-\bar{a}}\right) + \frac{2\Gamma I}{(2\pi i)^2} \frac{1}{z} \left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-\bar{a}}\right) + \\ & + \frac{I^2}{(2\pi i)^2} \left\{ \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-\bar{a}} \right\}^2 \end{aligned}$$

и члены

$$V_\infty^2 e^{-2\theta i} \left(1 - \frac{e^{2\theta i}}{z^2}\right) \frac{1}{\chi'(z)} - \frac{2V_\infty e^{\theta i} \Gamma}{2\pi i z^2} \frac{1}{\chi'(z)}$$

и

$$\frac{\Gamma^2}{(2\pi i)^2} \frac{1}{z^2} \frac{1}{\chi'(z)}$$

не имеют вычетов, то остается вычислить интегралы от остальных слагаемых. При этом необходимо помнить, что точка \bar{a} лежит внутри контура L и точка a вне его.

Вычисление всех этих интегралов дает следующие результаты:

$$1) \quad \int_L \frac{2V_\infty e^{-\theta i} \Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z} \frac{dz}{\chi'(z)} = 2V_\infty e^{-\theta i} \Gamma \frac{1}{\chi'(\infty)}, \quad (5)$$

так как контур L можно заменить окружностью бесконечно-большого радиуса;

$$2) \quad \int_L 2V_\infty e^{-\theta i} \frac{I}{2\pi i} \cdot \frac{1}{z-a} \cdot \frac{dz}{\chi'(z)}$$

вычислим следующим образом. Очевидно, что

$$\int_C \frac{1}{z-a} \frac{dz}{\chi'(z)} = \int_L \frac{1}{z-a} \frac{dz}{\chi'(z)} + \int_{L_1} \frac{1}{z-a} \frac{dz}{\chi'(z)}$$

(фиг. 20).

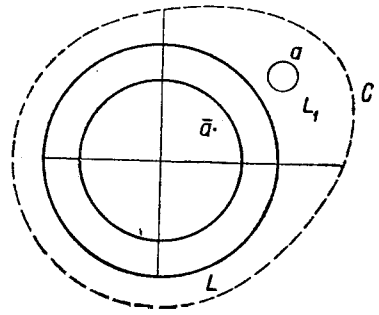
Если C удалить в бесконечность, то

$$\int_C \frac{1}{z-a} \frac{dz}{\chi'(z)} = 2\pi i \frac{1}{\chi'(\infty)}$$

и

$$\int_C \frac{1}{z-a} \frac{dz}{\chi'(z)} = 2\pi i \frac{1}{\chi'(a)},$$

а потому



Фиг. 20

$$\int_L 2V_\infty e^{-\theta i} \frac{I}{2\pi i} \frac{1}{z-a} \frac{dz}{\chi'(z)} = 2V_\infty e^{-\theta i} I \left[\frac{1}{\chi'(\infty)} - \frac{1}{\chi'(a)} \right]. \quad (6)$$

3) В интеграле

$$\int_L 2V_\infty e^{-\theta i} \frac{I}{2\pi i} \left(1 - \frac{e^{2\theta i}}{z^2}\right) \frac{dz}{(z-a)\chi'(z)}$$

контур интегрирования можно заменить окружностью сколь угодно большого радиуса, а потому

$$\int_L 2V_{\infty} e^{-\theta i} \frac{I}{2\pi i} \left(1 - \frac{e^{2\theta i}}{z^2}\right) \frac{dz}{(z - \bar{a}) \chi'(z)} = 2V_{\infty} e^{-\theta i} I \frac{1}{\chi'(\infty)}. \quad (7)$$

4) Интеграл $\int \frac{2GI}{(2\pi i)^2} \frac{1}{z(z-a)} \frac{dz}{\chi'(z)}$ вычисляется аналогично интегралу (2)

и мы получим:

$$\int \frac{2GI}{(2\pi i)^2} \frac{dz}{z(z-a)\chi'(z)} = -\frac{2GI}{2\pi i} \frac{1}{a\chi'(a)}. \quad (8)$$

5) Интеграл

$$\int_L \frac{2GI}{(2\pi i)^2} \frac{1}{z} \frac{1}{z-a} \frac{dz}{\chi'(z)} = 0, \quad (9)$$

что легко получается из того замечания, что L может быть заменен окружностью сколь угодно большого радиуса.

6) Наконец,

$$\begin{aligned} \int_L \frac{I^2}{(2\pi i)^2} \left\{ \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-\bar{a}} \right\}^2 \frac{dz}{\chi'(z)} &= \frac{I}{(2\pi i)^2} \left\{ \frac{dz}{(z-a)^2 \chi'(z)} - \right. \\ &\quad \left. - 2 \int_L \frac{1}{(z-a)(z-\bar{a})} \frac{dz}{\chi'(z)} + \int_L \frac{dz}{(z-\bar{a}) \chi'(z)} \right\} = \\ &= \frac{I^2}{(2\pi i)^2} \left\{ + \frac{\chi''(a)}{\chi'^2(a)} + 2 \frac{1}{a-\bar{a}} \frac{1}{\chi'(a)} \right\}, \end{aligned} \quad (10)$$

так как в первом и во втором интеграле можно применить тот же прием, как и в интеграле (2) и

$$\int_L \frac{dz}{(z-a)^2 \chi'(z)} = - \int_{L_1} \frac{dz}{(z-a)^2} \left\{ \frac{1}{\chi'(a)} - \frac{\chi''(a)}{\chi'^2(a)} (z-a) \dots \right\},$$

а в третьем интеграле контур интегрирования можно заменить окружностью сколь угодно большого радиуса.

Подставляя все найденные значения в формулу (4'), окончательно получим:

$$\begin{aligned} Y + iX &= -\frac{\rho}{2} \left\{ 2V_{\infty} e^{-\theta i} I \frac{1}{\chi'(\infty)} + 2V_{\infty} e^{-\theta i} I \left(\frac{1}{\chi'(\infty)} - \frac{1}{\chi'(a)} \right) - \right. \\ &\quad \left. - 2V_{\infty} e^{\theta i} I \frac{1}{a^2 \chi'(a)} - 2V_{\infty} e^{-\theta i} I \frac{1}{\chi'(\infty)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2GI}{2\pi i} \frac{1}{a\chi'(a)} + \frac{I^2}{2\pi i} \left[\frac{\chi''(a)}{\chi'^2(a)} + \frac{2}{a-\bar{a}} \frac{1}{\chi'(a)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Формула (11) и позволяет рассчитать величину подъемной силы при наличии вихрей между щитком и крылом.

Эту формулу можно упростить следующим образом. Можно считать малым влияние вихрей друг на друга, а потому можно опустить в первом

приближении члены, содержащие произведение вихрей, т. е. члены с ΓI и I^2 . Тогда получим более простую приближенную формулу:

$$Y + iX = -\rho V_\infty \left[e^{-\theta i} \Gamma \frac{1}{\chi'(\infty)} - e^{-\theta i} I \frac{1}{\chi'(a)} - e^{\theta i} I \frac{1}{a^2 \chi'(a)} \right] = \\ = -\rho V_\infty \frac{e^{-\theta i}}{\chi'(\infty)} \left\{ \Gamma - I \frac{\chi'(\infty)}{\chi'(a)} \left[1 + \left(\frac{e^{\theta i}}{a} \right)^2 \right] \right\}. \quad (12)$$

Подставляя сюда значение Γ из формулы (3), получим окончательно:

$$Y + iX = -\rho V_\infty \frac{e^{-\theta i}}{\chi'(\infty)} \left\{ -4\pi V_\infty \sin \theta + \frac{I \left(r - \frac{1}{r} \right)}{\left(r + \frac{1}{r} \right) - 2 \cos \mu} - \right. \\ \left. - I \frac{\chi'(\infty)}{\chi'(a)} \left[1 + \left(\frac{e^{\theta i}}{a} \right)^2 \right] \right\}, \quad (13)$$

откуда при $I = 0$ получается обычная формула для подъемной силы крыла при отсутствии вихрей.

В этой формуле значения χ' найдем из формулы (1) (§ 2). Так как

$$\frac{d\zeta}{dz} = C_1 \frac{(z-1)(z-b_1)^{\alpha-1}(z-c_1)(z-d_1)(z-l_1)^{-\alpha}}{z^2} = \chi'(z),$$

то

$$\left(\frac{d\zeta}{dz} \right)_{z=\infty} = \chi'(\infty) = C_1$$

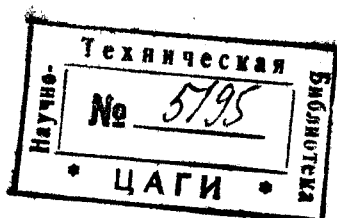
и

$$\frac{\chi(\infty)}{\chi(a)} = \frac{a^2}{(a-1)(a-b_1)^{\alpha-1}(a-c_1)(a-d_1)(a-l_1)^{-\alpha}}. \quad (14)$$

Формулы (13) и (14) позволяют рассчитать подъемную силу при наличии вихря у щитка.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Краткое содержание	3
Предисловие	—
О. В. Голубева. Приближенная теория надкрылка и подкрылка	4
Введение	—
1. Обтекание круглого цилиндра в присутствии неподвижного вихря	—
2. Смещение критической точки	9
3. Влияние вихря на распределение скоростей на поверхности цилиндра	12
4. Давление потока на цилиндр в присутствии вихря	18
5. Определение интенсивности добавочного вихря	20
6. Теория работы щитка над крылом	23
7. Теория работы щитка под крылом	28
8. Предельный угол атаки для щитков	32
9. Сводка формулы	33
10. Примеры	34
В. В. Голубев. К теории щитков, плотно прилегающих к крылу	36
1. Общие замечания	—
2. Отображение углового профиля	37
3. Отображение профиля со щитком	39
4. Об условиях, определяющих положение вихря	44
5. Физические выводы. Примеры	46
6. Влияние вихрей на подъемную силу	50



Отв. редактор С. А. Чаплыгин

Техн. редактор И. К. Богданов

Сдано в набор 29/I 1939 г.

Подписано к печати 25/II 1939 г.

Формат бум. 70 × 108¹/₁₆

3¹/₂ печ. л., 66 000 зн. в п. л.

Уполн. Мособлгорлита Б—1624

Тираж 500 экз.

Зак. тип. 56

Типография ЦАГИ, Москва, ул. Радио, 17